



UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA
E.T.S.I.I. y de Telecomunicación
Campus Arrosadía, s/n
31006 Pamplona, Navarra, Spain
Tel.: 34-48-169000 Fax: 34-48-169169



Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Tesis Doctoral

***“Diseño de guías de onda
cuasi-ópticas para modos
gaussianos de orden superior.”***

Autor:

Carlos del Río Bocio
Ingeniero en Electrónica

Director:

Mario Sorolla Ayza
Dr. Ingeniero de Telecomunicación

Año 1996

A mi familia

Agradecimientos

Después de las múltiples y más que formativas estancias en el Forschungszentrum de Karlsruhe, Alemania, no tengo menos que agradecer al *Prof. Dr. Manfred Thumm* y al *Dr. Mario Sorolla*, director de la tesis que aquí presento, por la posibilidad que me han brindado de poder trabajar en un centro de investigación de tal alto nivel.

Así, creo que también requieren una especial mención, el *Dr. Andreas Wien*, *D. Arnold Möbius*, del mismo centro de Karlsruhe, por todas sus atenciones, ya sean a nivel personal como profesional. En especial, debo agradecer al *Dr. Andreas Wien*, la posibilidad de utilizar su código de simulación de componentes en guía, que posteriormente sirvió como modelo para una nueva versión, denominada SCATTMAT, y desarrollada por *D. Antonio Liberal*, como su trabajo final de carrera, bajo la dirección del *Dr. Mario Sorolla* y la mía propia.

En los últimos tiempos, *D. Arnold Möbius*, ha colaborado muy de cerca en el planteamiento y la realización de los cálculos de la primera línea de transmisión cuasi-óptica que utiliza modos gaussianos de orden superior.

No debo olvidar tampoco al personal del *Institut für Plasmaforschung* de la universidad de Stuttgart, *Dr. Walter Kasperek* y *D. Dietmar Wagner*, por citar algunos. Por las muy enriquecedoras discusiones mantenidas, así como la multitud de cálculos de validación que les he pedido, y me han servido rápida y gustosamente.

Quiero hacer una mención especial a *D. Ramón Gonzalo*, mi colaborador más cercano, y que realizando su proyecto final de carrera bajo mi dirección, realizó innumerables cálculos de diferentes dispositivos de guías de onda, que han resultado determinantes para la feliz conclusión de este trabajo.

Por supuesto, debo también incluir al resto de compañeros del departamento, que han tenido que soportarme.

Y finalmente, que no significa en último lugar, a mi familia, ya que sin su apoyo constante e incondicional hubiera sido imposible la realización de este trabajo.

Resumen

En este trabajo se presenta un nuevo método de diseño de guías de onda cuasi-ópticas para modos gaussianos, a frecuencias milimétricas. En concreto, se centrará en la generación de modos gaussianos de orden superior, como posibles candidatos a ser portadores de la energía a través de la línea de transmisión cuasi-óptica.

Para lograrlo, se presenta un perfil de antena óptimo para la excitación de modos gaussianos de orden superior, a partir de modos de guía de onda convencional. Este perfil, además de conseguir estructuras gaussianas de alta pureza, adapta óptimamente las estructuras de guías de onda con el espacio libre.

La idea de diseño es absolutamente general, por lo que puede ser aplicable a guías de onda rectangulares, ya sean corrugadas o no. El abanico de aplicaciones de este tipo de antenas es muy grande, ya que se pueden utilizar como alimentadoras de líneas de transmisión cuasi-ópticas, como alimentadores de antenas parabólicas para la emisión y/o recepción de señales via satélite, etc.

En cuanto al diseño de reflectores, se comprueba la existencia, bajo ciertas condiciones (paraxialidad), de una compatibilidad total de los diseños de guías de onda cuasi-ópticas para modos de orden superior con los diseños clásicos para el modo gaussiano fundamental. Se estudian las estructuras de los modos gaussianos de orden superior, definiendo unos nuevos límites de paraxialidad para estos modos superiores.

Finalmente, a modo de validación, se ha podido diseñar, construir y medir, la primera línea cuasi-óptica que utiliza un modo gaussiano de orden superior para transportar la potencia entre un generador de microondas y un aplicador o cavidad final. Se ha obtenido una buena concordancia entre los resultados de la simulación y los medidos experimentalmente.

Abstract

In this work, a new design method for quasi-optical beam waveguides for gaussian modes at millimetre wave frequencies is presented. In particular, we will focus in the possibility of using higher order gaussian modes, as power carriers through the transmission line.

Moreover, an optimal horn antenna profile to excite high order gaussian modes from waveguide modes is given. This profile, besides providing very high purity gaussian structures, is the optimal match between the waveguide and free space.

These antennas have a wide range of applications, since they can be used as feeders of quasi-optical transmission lines or parabolic antennas for satellite communications, etc. The idea is absolutely general, as it can also be applied to rectangular waveguides, and even to corrugated or smooth waveguides.

In relation with the reflector design, it is shown the compatibility between the systems designed for the fundamental gaussian mode and the higher order ones, under some specific conditions of paraxiality. In this sense, the paraxiality conditions for the higher order modes are defined.

Finally, as a validation of the present work, it has been possible to design, built and measure the first quasioptical transmission line having a high order gaussian mode as power carrier. The theoretical and measured results are in good agreement.

Índice de contenidos

AGRADECIMIENTOS	i
RESUMEN	ii
ABSTRACT	iii
ÍNDICE DE CONTENIDOS	iv
<u>CAPÍTULO 1.- INTRODUCCIÓN</u>	<u>1</u>
1.1.- ANTECEDENTES	1
1.1.1.- APLICACIONES	1
1.1.2.- DISPOSITIVOS GENERADORES	2
1.1.3.- LÍNEAS DE TRANSMISIÓN	4
1.1.4.- TECNOLOGÍA CUASI-ÓPTICA	5
1.2.- MOTIVACIÓN	6
1.2.1.- DISEÑO DE ANTENAS CONVERSoras DE MODOS GAUSSIANOS	6
1.2.2.- DISEÑO DE REFLECTORES	9
<u>CAPÍTULO 2.- MODOS GAUSSIANOS</u>	<u>11</u>
2.1.- DEDUCCIÓN DE LAS FÓRMULAS GENERALES GAUSSIANAS	13
2.1.1.- REPRESENTACIÓN MODAL	13
Espectro angular de ondas planas	15
Modos Gaussianos	19
<i>A.- Coordenadas rectangulares: Funciones de Gauss-Hermite</i>	<i>20</i>
<i>B.- Coordenadas cilíndricas: Funciones de Gauss-Laguerre</i>	<i>25</i>
2.1.2.- CONSIDERACIONES SOBRE PARAXIALIDAD	27
2.2.- CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LOS MODOS GAUSSIANOS	31
2.2.1.- MODO GAUSSIANO FUNDAMENTAL	31

Módulo del modo gaussiano fundamental	32
<i>Distancia de Rayleigh o profundidad de haz</i>	32
<i>Intensidad de campo</i>	32
<i>Potencia transportada por un haz gaussiano</i>	33
<i>Función de ancho de haz</i>	34
Fase del modo gaussiano fundamental	36
<i>Reconsideraciones sobre la existencia de las soluciones. ¿Paraxialidad?</i>	37
<i>Formas de los frentes de fase</i>	40
2.2.2.- MODOS DE ORDEN SUPERIOR: FUNCIONES DE GAUSS-HERMITE	43
Módulo de los modos Gauss-Hermite de orden superior	43
Fase de los modos Gauss-Hermite de orden superior	49
<i>Reconsideraciones sobre el criterio de paraxialidad para las soluciones basadas en las funciones de Gauss-Hermite</i>	50
2.2.3.- MODOS DE ORDEN SUPERIOR: FUNCIONES DE GAUSS-LAGUERRE	55
Módulo de los modos de Gauss-Laguerre de orden superior	56
Fase de los modos de Gauss-Laguerre de orden superior	60
<i>Reconsideraciones sobre el criterio de paraxialidad para las soluciones basadas en las funciones de Gauss-Laguerre</i>	60

CAPÍTULO 3.- GENERACIÓN DE MODOS GAUSSIANOS MEDIANTE ANTENAS DE BOCINA

3.1.- MODOS GAUSSIANOS Y MODOS DE GUÍA	66
Modos de guía circular: Modos TE_{0m}	66
Modos gaussianos cónicos	67
3.1.1.- PATRÓN DE RADIACIÓN DE MODOS TE_{0M} COMO COMBINACIÓN DE MODOS GAUSSIANOS CÓNICOS	70
3.1.2.- OBTENCIÓN DE UNA ESTRUCTURA GAUSSIANA COMO COMBINACIÓN DE MODOS DE GUÍA TE_{0M}	73
3.2.- ANTENAS DE BOCINA ADAPTADORAS DE MODOS GAUSSIANOS	78
3.2.1.- CONSIDERACIONES PREVIAS SOBRE LA FORMA DE LA ANTENA	78
3.2.2.- ANTENA ADAPTADORA “NATURAL”	82
Explicación del comportamiento real	84
Ejemplo de aplicación	87
3.2.3.- OTRAS FORMAS DE ANTENAS ADAPTADORAS	88
3.3.- CONCLUSIONES	92

<u>CAPÍTULO 4.- CONSIDERACIONES SOBRE EL DISEÑO DE REFLECTORES PARA MODOS GAUSSIANOS DE ORDEN SUPERIOR</u>	93
4.1.- LÍNEAS DE TRANSMISIÓN CUASI-ÓPTICAS	96
Método clásico	98
Limitaciones del método clásico	100
4.2.- DISEÑO DE REFLECTORES	103
4.3.- ANÁLISIS DE REFLECTORES	106
4.3.1.- UTILIZANDO LA TEORÍA DE ÓPTICA DE RAYOS	106
4.3.2.- RADIACIÓN DE CORRIENTES INDUCIDAS EN EL REFLECTOR: HUYGENS	109
4.4.- CONSIDERACIONES FINALES	113
<u>CAPÍTULO 5.- APLICACIONES</u>	115
5.1.- INTRODUCCIÓN	117
5.1.1.- RESUMEN DE LAS PRINCIPALES CARACTERÍSTICAS DE LAS ANTENAS DE BOCINA ADAPTADORAS DE MODOS GAUSSIANOS	117
5.2.- CODO CUASI-ÓPTICO	119
5.3.- DISEÑO DE LÍNEA DE TRANSMISIÓN CUASI-ÓPTICA	122
Característica de filtrado longitudinal de las líneas cuasi-ópticas	125
Diseño de la antena	127
Diseño de la línea de transmisión	129
Resultados	135
<u>CAPÍTULO 6.- CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS</u>	137
<u>APÉNDICES: MÉTODOS NUMÉRICOS EMPLEADOS</u>	139

<u>APÉNDICE I.- MÉTODO DE ANÁLISIS MODAL Y DE LA MATRIZ</u>	
<u>GENERALIZADA DE DISPERSIÓN</u>	<u>141</u>
I.1.- ANÁLISIS MODAL	141
I.2.- MATRIZ DE DISPERSIÓN	146
A.- COMBINACIÓN DE DOS MATRICES DE DISPERSIÓN	147
B.- COMBINACIÓN DE N MATRICES DE DISPERSIÓN	149
<u>APÉNDICE II.- REPRESENTACIÓN DEL PATRÓN DE RADIACIÓN EN</u>	
<u>CAMPO LEJANO</u>	<u>151</u>
<u>APÉNDICE III.- CÁLCULO DE EFICIENCIAS</u>	<u>153</u>
<u>REFERENCIAS</u>	<u>155</u>

Capítulo 1.- Introducción

En este capítulo se presentan en primer lugar, unos breves antecedentes de la situación actual de la tecnología, pasando posteriormente a explicar con un poco más de detalle las motivaciones que han llevado a la realización de la presente tesis doctoral.

1.1.- Antecedentes

1.1.1.- Aplicaciones.

Cada día son más las aplicaciones que trabajando a frecuencias de ondas milimétricas, necesitan unos niveles elevados de potencia. Entre las más destacadas podríamos señalar [Gaponov-Grekhov, 94]:

- *Comunicaciones*: Enlaces terrestres y vía satélite, ya sea señal de televisión, radio, o señales de propósito más general.
- *Radar*: Cada vez se requiere una mayor capacidad de los sistemas de radar para extraer más información de los blancos. También para aplicaciones de exploración atmosférica.
- *Experimentos de fusión*: Es una de las aplicaciones que más potencia requieren, y la que ha motivado todo el desarrollo de los generadores relativistas de microondas. En estas aplicaciones se llegan a manejar niveles de potencia de aproximadamente 100 MW, a unas frecuencias bastante altas [England, 85; Martín, 89].
- *Aceleradores de partículas*: Son aplicaciones que requieren una gran cantidad de potencia, además de un efecto de amplificación.
- *Proceso avanzado de materiales*: Es la aplicación más reciente y ya posee muchas variantes, debido a sus peculiares características de

calentamiento rápido y uniforme de las piezas. Así lo podremos utilizar para la sinterización de nuevas cerámicas, secado de materiales en un tiempo muy corto consiguiendo una mayor calidad de los mismos, etc.

Los sistemas generadores necesarios para hacer viables las aplicaciones anteriores, deberán ser capaces de proporcionar cierta cantidad de potencia a frecuencias milimétricas. Con estado sólido, se ha podido llegar a trabajar, hasta los 100 GHz., pero con unos niveles de potencia muy pequeños. Debemos tener en cuenta, que las necesidades de potencia de las aplicaciones a frecuencias milimétricas, van desde los pocos vatios, de las aplicaciones de enlaces terrestres, hasta los niveles de MW's, de los experimentos de fusión.

Todos los dispositivos generadores en régimen de onda continua, de cualquier rango de frecuencias, tienen de forma intrínseca un compromiso entre la cantidad de potencia entregada y la frecuencia a la que se entrega esa potencia. En algunos casos, podemos aumentar la potencia entregada, trabajando en régimen pulsado.

1.1.2.- Dispositivos generadores.

En estado sólido, está claro que la posibilidad de manejar potencia está seriamente limitada por los materiales empleados. Los tubos de vacío, en principio permiten niveles de potencia realmente altos.

En un principio, los tubos clásicos, inyectaban en un campo magnético un haz de electrones, que lo hacían atravesar cierta cavidad resonante. Esa cavidad, ajustada al modo fundamental, define la frecuencia del generador. Este tipo de generadores, a frecuencias menores de 20 GHz., pueden llegar a ofrecer potencias de 1-20 kW trabajando en régimen permanente, y llegar hasta 10-100 MW, trabajando en régimen pulsado (microsegundos). Será suficiente para las aplicaciones de comunicaciones y radar convencional. También se suelen utilizar en sistemas de fusión como un sistema alternativo de calentamiento del plasma, ya que la frecuencia de resonancia ciclotrón de los iones no es muy alta, y se pueden conseguir niveles aceptables de potencia.

Algunos generadores que estarían incluidos en esta categoría serían los tipos convencionales de *Klystrons* y *Magnetrones* [Liao, 88].

Pese a suponer una sustancial mejora con respecto a los generadores de estado sólido, los tubos clásicos, tienen una limitación muy grande al aumentar la frecuencia, ya que cada vez las cavidades resonantes, ajustadas al modo fundamental, deben ser menores, limitando la posibilidad de manejar potencia.

Para suplir ese defecto, surgieron los tubos relativistas, en los cuales se aceleran electrones a velocidades relativistas, en el interior de una campo magnético. Estos electrones, por la presencia del campo magnético, se agrupan en sus órbitas, generando una radiación de frenado coherente, que localizada en el interior de una cavidad sobredimensionada controla el espectro modal generado. En este caso, lo que fija la frecuencia, no es otra cosa que la intensidad de campo magnético que hace girar más o menos rápido a las agrupaciones electrónicas en sus órbitas, aproximadamente existe una relación de 28 GHz. por tesla aplicado. Lógicamente, al trabajar con cavidades sobredimensionadas, podemos manejar unos niveles mayores de potencia que con los tubos clásicos, figura 1.1. Se pueden llegar a manejar hasta niveles de potencia del orden de 1 MW, trabajando en régimen de onda continua a una frecuencia de 170 GHz. [Thumm, 96].

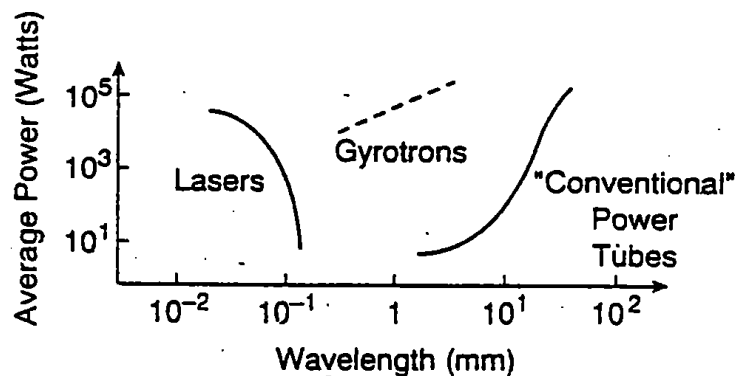


Figura 1.1: Capacidad de manejar potencia de lasers y tubos de microondas. Se puede apreciar claramente la ausencia de fuentes de alta potencia para longitudes de onda entre 0.03 mm. y 30 mm. (La línea continua indica las fuentes convencionales, y la discontinua indica las nuevas fuentes de alta potencia de microondas).

En esta familia, el dispositivo más desarrollado es sin duda el *Gyrotrón* (*Oscilador*) [Flyagin, 77], de hecho, al efecto de radiación de frenado, se le denomina efecto Gyrotrón. Pero dentro de esta categoría, deberíamos citar también las versiones

relativistas del los *Kylstrons* y *Magnetrones*, *CARM* (Ciclotron Autoresonance Maser), *FEM* (Free Electron Maser), entre otros, que son susceptibles de ser empleados como amplificadores [Edgcombe, 93; Gaponov-Grekhov, 94].

1.1.3.- Líneas de transmisión.

La manera más natural de conducir la potencia de los dispositivos anteriormente citados, es mediante una guía de onda convencional. Normalmente, el modo que se entrega a la salida de los sistemas generadores, no siempre es el mejor modo que se requiere para el transporte y la posterior radiación de la potencia. Los modos más apropiados dependerán de la aplicación concreta y del dispositivo generador.

Debido a esto, resulta obvio, que deberemos incorporar a nuestra línea de transmisión componentes conversores de modos [Doane, 82; Thumm 84 y 91; Kumric, 88; Sorolla, 91], para ir controlando en cada momento que distribución de campo es la más apropiada, en función de las necesidades de propagación (pérdidas mínimas), radiación (haz pincel con polarización muy bien definida), etc. [Unger, 58; Tang, 61 Sporleder, 79; Edgcombe, 93].

Además, normalmente, la línea de transmisión deberá salvar ciertos obstáculos, por lo que necesitará incorporar codos [Sorolla, 91].

El objetivo de los métodos de diseño de estos componentes es minimizar las pérdidas. Básicamente debido a que las eficiencias de los generadores son bastante malas, del orden de 30-50 %. En otras palabras, se debe alimentar al tubo con una potencia eléctrica dos o tres veces mayor de la potencia de radiofrecuencia deseada como salida. Esto ya resulta suficientemente caro, como para tener que aumentar más aún la potencia de las fuentes de alimentación para compensar las pérdidas en la línea de transmisión.

Estos métodos de diseño de los componentes de la línea de transmisión, también deberán minimizar las reflexiones hacia el generador, ya que pueden hacer variar el correcto funcionamiento, pudiendo dañar el generador, o incluso, en el peor de los casos, llegar hasta la total destrucción del mismo.

1.1.4.- Tecnología cuasi-óptica.

Algunos de estos componentes en guía de onda, aumentan apreciablemente su longitud al aumentar la frecuencia. Esto, unido con el hecho de que a estas frecuencias a las ondas electromagnéticas se les pueden suponer comportamientos muy similares a los sistemas ópticos, ha llevado al desarrollo de una nueva tecnología de guías de onda para el transporte de la potencia, basada en principios cuasi-ópticos [Edgcombe, 93].

La manera más rápida de compatibilizar las guías de onda convencionales con las guías de onda cuasi-ópticas es mediante un dispositivo conversor, que adapte las dos estructuras. Este dispositivo deberá generar una estructura gaussiana apta para ser utilizada como portadora de la potencia a través de la línea de transmisión cuasi-óptica a partir de una distribución de campos del interior de una guía de ondas.

Este dispositivo conversor, en las últimas décadas, se ha introducido en el interior del tubo de vacío, obteniendo directamente la potencia en forma de haz gaussiano fundamental, para ser guiado mediante una línea de transmisión cuasi-óptica.

La transmisión basada en técnicas cuasi-ópticas, consiste en la utilización iterativa de reflectores que van refocalizando la estructura gaussiana en diferentes puntos intermedios con el fin de evitar que por el efecto de difracción se pierda potencia a lo largo de toda la línea.

1.2.- Motivación

1.2.1.- Diseño de antenas conversoras de modos gaussianos.

Hasta hoy en día, los dispositivos disponibles para la conversión de modos de estructuras de guías de onda convencionales a estructuras gaussianas, son básicamente las diferentes antenas de Vlasov [74, 75]. La forma de estas antenas puede llegar a ser bastante complicada, dependiendo básicamente del modo de entrada. El modo de salida es siempre el mismo, un modo gaussiano fundamental.

Para el caso de modos de guía de onda circular, TE_{0m} , la forma de la antena de Vlasov adecuada la tenemos representada en la figura 1.2.

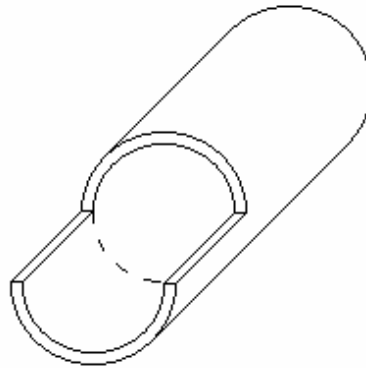


Figura 1.2: Representación esquemática de una antena de Vlasov para modos TE_{0m} .

La eficiencia de conversión de este dispositivo es bastante pobre, por lo que es necesario realizar unas deformaciones en la paredes interiores para llegar a valores de eficiencia aceptables, figura 1.3.

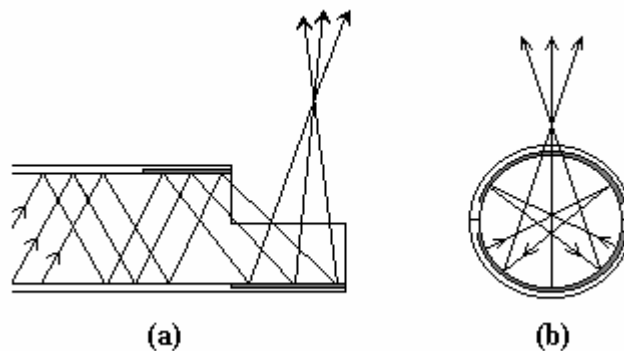


Figura 1.3.- Forma esquemática de la antena de Vlasov para modos TE_{0m} de guía circular lisa. En color más oscuro se representan las zonas de la guía que deben ser alteradas para obtener una buena conversión a una estructura gaussiana. a) Vista lateral y b) vista de frente.

A parte de estas deformaciones, es necesario añadir un par de reflectores conformadores del haz, para mejorar la estructura gaussiana [Denisov, 92].

Debido a la elección de modos de orden superior ($TE_{22,6}$, $TE_{10,4}$, etc.) como modos de la cavidad resonante de los gyrotrones para poder subir el nivel de potencia, fue necesario el desarrollo de unas nuevas formas de antenas [Vlasov, 75], para generar el modo gaussiano fundamental requerido.

Actualmente, se está incorporando todo este sistema en el interior de los gyrotrones, pudiendo desacoplar la señal de radiofrecuencia del cañón de electrones de una manera muy sencilla, figura 1.4.

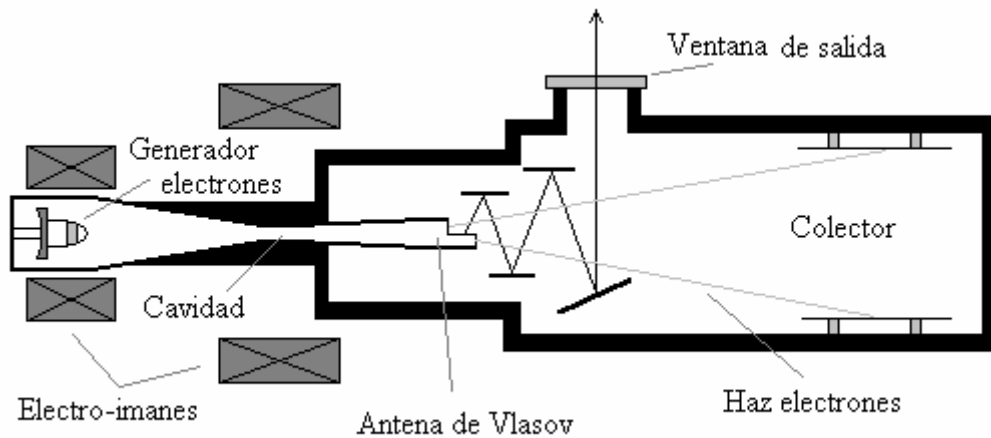


Figura 1.4.- Esquema de gyrotrón cuasi-óptico.

Desde la aparición de las técnicas cuasi-ópticas, ha habido diferentes intentos de utilizar los modos gaussianos de orden superior para transportar la potencia a través de una línea de transmisión cuasi-óptica. El problema principal recaaba en la generación de este tipo de modos.

En un principio, aparecen ciertos trabajos de mejora del *Mitre Bend* [Marcatilli, 62 y 64], en los que se intentan conseguir una mezcla de modos con un patrón de radiación con bajos lóbulos laterales (primera aproximación de una estructura gaussiana).

Básicamente se buscan una serie de mezclas de modos sencillas, con un desfase muy concreto, que tengan unos lóbulos laterales bajos. Así, se observa que las mezclas de modos siguientes tienen unos niveles bajos de lóbulos laterales, y por consiguiente

podemos asumir que tienen cierto comportamiento gaussiano. Para obtener el modo gaussiano fundamental Graubner [94] propone la mezcla siguiente:

$$HE_{11} \quad 85\% \ 0^\circ \quad HE_{12} \quad 15\% \ 180^\circ.$$

Para el modo gaussiano cónico de primer orden, se sugieren varias posibilidades [Rebuffi, 89 y 89a]:

$$\begin{array}{llll} TE_{01} & 85\% \ 0^\circ & TE_{02} & 15\% \ 180^\circ \\ TE_{0,m-1} & 10\% \ 0^\circ & TE_{0,m} & 75\% \ 180^\circ \quad TE_{0,m+1} \ 15\% \ 0^\circ \\ TE_{0,m-1} & 15\% \ 180^\circ & TE_{0,m} & 75\% \ 0^\circ \quad TE_{0,m+1} \ 10\% \ 180^\circ \end{array}$$

El mayor problema que se les presentaba, era precisamente la generación de las mezclas adecuadas. Utilizando técnicas de pequeñas deformaciones en la guía, podemos diseñar componentes que generen una determinada mezcla de modos. Un límite bastante insalvable, es obtener mezclas en las que pretendamos fijar las relaciones de fase adecuadas entre más de dos modos.

Un planteamiento similar era el que utilizaban algunos científicos Rusos [Vlasov, Comunicación privada; Shapiro, 92], ya que ellos fijaban unos perfiles parabólicos parametrizados, e intentaban optimizar un parámetro para maximizar la eficiencia de conversión a la salida a una estructura gaussiana. Hay que decir que consiguieron llegar a eficiencias bastante buenas, pero la elección del perfil parabólico fue un tanto arbitraria.

En este trabajo se formaliza, la primera idea de los autores Rusos [Vlasov, Comunicación privada; Shapiro, 92], proponiendo un perfil hiperbólico, idéntico al que describen las estructuras gaussianas al propagarse. Con este tipo de bocinas, se obtienen de manera automática las mezclas adecuadas para generar una estructura gaussiana, con la particularidad de aumentar la eficiencia de conversión al ir aumentando la longitud de la antena. A este tipo de perfiles se denominará en lo que sigue como “natural” por la gran sencillez del diseño.

Es importante destacar un cambio en la forma de trabajar. Hasta ahora, se buscaban buenas mezclas de modos. Con este tipo de perfil, las mezclas que anteriormente se conocían, se obtienen de manera automática, pudiéndonos despreocupar por la mezcla de salida, ya que puede llegar a ser bastante complicada, pero sabemos que su distribución de campos es perfectamente gaussiana. En algunos casos se obtienen estructuras gaussianas de una pureza superior a 99.9%.

Ha demostrado ser un perfil con unas grandes propiedades, ya que es capaz de “gaussianizar” prácticamente cualquier distribución de campos en el interior de una guía de ondas. A parte de ser una idea perfectamente aplicable a otras geometrías de guías de onda.

En concreto, en este trabajo, nos centraremos en la generación de modos gaussianos cónicos a partir del modos TE_{0m} de guía circular lisa. Sin embargo, ya se han realizado cálculos con el modo HE_{11} de guía circular corrugada como entrada, obteniendo un modo gaussiano fundamental de muy alta pureza a la salida.

1.2.2.- Diseño de reflectores

Se puede decir, que hasta ahora, siempre se ha trabajado con el modo gaussiano fundamental en sistemas de transmisión cuasi-ópticos. Únicamente, existen varios trabajos que proponen una realización prácticamente cuasi-óptica para mejorar un *Mitre Bend* [Sporleder, 76; Shapiro, 92]. En ella, se utilizan unos perfiles parabólicos, para definir unos frentes de fase esféricos, que proyectados sobre un reflector elíptico, permite refocalizar la potencia hacia otra guía de onda mediante otro perfil parabólico.

Las técnicas de diseño de reflectores cuando trabajamos con el modo gaussiano fundamental, son sobradamente conocidas, debido a las semejanzas con las técnicas de óptica geométrica.

En este trabajo, debido a la viabilidad de generar muy eficientemente modos gaussianos de orden superior, se analiza también la posibilidad de guiarlos a través de una línea de transmisión cuasi-óptica.

Se realizan estudios originales de las propiedades de estos modos de orden superior, definiendo los límites de paraxialidad, o lo que lo mismo de aplicabilidad de estas estructuras como modo del espacio libre. Se comprueba, que bajo ciertas condiciones, los diseños de los reflectores para modos gaussianos de orden superior pueden ser perfectamente compatibles con los utilizados con el modo gaussiano fundamental.

Finalmente, se ha podido diseñar, construir y medir la primera línea cuasi-óptica que utiliza un modo gaussiano de orden superior como soporte para el transporte de la potencia entre el dispositivo generador y el aplicador final en un sistema de sinterización de cerámicas. La línea consta de una antena de bocina que genera un modo cónico de

primer orden a partir de un modo TE_{02} de entrada, y de dos reflectores elípticos que llevan la potencia hasta el aplicador final. En este caso, se desea una distribución uniforme del campo en el aplicador, por lo que la utilización de un modo gaussiano de orden superior en la línea de transmisión es posible debido a la distribución de campo aleatorizada o uniforme que se desea. Para conseguir esta distribución uniforme, se diseña la cavidad del mismo modo que una cámara reverberante, además de introducirse un dispositivo metálico en movimiento. Este proceso de aleatorización, independiza la distribución final de campos con la distribución de entrada de la potencia. Por esta razón, en este tipo de sistemas, lo único importante es llevar la mayor parte de la potencia posible hasta el aplicador final, sin tener que preocuparnos por la forma que esta tenga a la entrada de la cavidad.

Al final de este trabajo se presentan las conclusiones, así como las aportaciones originales y futuras líneas de investigación.

Capítulo 2.- Modos gaussianos

El principal objetivo de este trabajo es diseñar los componentes de una línea de transmisión cuasi-óptica; desde la generación de la distribución de campo que viajará por la línea, hasta los componentes que harán posible la transmisión de la energía. Una línea de este tipo, impone una serie de características a la estructura de campos que viaje por ella, ya que se le suponen ciertos comportamientos o propiedades, como por ejemplo, el tener unos frentes de fase bien definidos y sobre todo una difracción controlada.

Los haces gaussianos son estructuras paraxiales que cumplen bastante bien estas restricciones, de hecho, el modo gaussiano fundamental desde hace años se viene utilizando en este tipo de líneas con unos resultados bastante buenos [Goubau, 61 y 68; Ogawa, 94; Kasperek, Comunicaciones privadas; Sorolla, 95].

En determinadas aplicaciones, como se ha visto en el capítulo anterior y se verá en el de aplicaciones, puede resultar conveniente la utilización de modos de orden superior en la línea de transmisión cuasi-óptica, por la sencillez con la que pueden ser generados (capítulo 3 de este trabajo).

En este capítulo, se generalizarán las líneas cuasi-ópticas conocidas hasta hoy en día, para los modos gaussianos de orden superior. Debemos conocer muy a fondo las características de estos modos para saber si tenemos o no que modificar la teoría cuasi-óptica, a la hora de diseñar los componentes que forman la línea.

En este capítulo se estudian los haces gaussianos como base generadora de cualquier estructura de campos paraxial en un semiespacio sin fuentes. Demostraremos, que estas estructuras gaussianas sirven realmente para guiar la potencia mediante reflexiones múltiples en reflectores adecuados, en un amplio rango de frecuencias a través de líneas cuasi-ópticas, sin pérdidas demasiado grandes debidas a la difracción, ya

que, al tratarse de estructuras gaussianas paraxiales, estas pérdidas son fácilmente controlables.

Se presentan dos familias de haces gaussianos, una en coordenadas rectangulares, que nos resultarán de mucha utilidad para el caso de partir de modos de guías de onda rectangulares, y otra en coordenadas cilíndricas, para el caso de guías de onda circulares.

Una vez presentadas las fórmulas de los haces gaussianos, comentaremos las principales características de estas estructuras, tanto del módulo (forma de expansión), como de la fase (frentes de fase), de vital importancia para diseñar correctamente los reflectores necesarios.

2.1.- Deducción de las fórmulas generales gaussianas

Las aplicaciones de ondas electromagnéticas a frecuencias mayores de unos pocos GHz.'s, como el calentamiento y diagnóstico de plasmas, radar de alta definición, sensores, astronomía, etc., requieren unas especificaciones muy restrictivas, no sólo en los dispositivos emisores y receptores, sino también en las estructuras de guiado y radiación.

Son este tipo de aplicaciones, las que justifican el estudio de estas estructuras gaussianas, ya que son, unas estructuras con una difracción controlada, que será menor cuanto más alta sea la frecuencia y viceversa. Esto nos limita en cierta manera las aplicaciones según la frecuencia a la que trabajemos. Para las frecuencias más bajas, tendremos problemas para salvar distancias grandes, debido a que la difracción es mayor.

A modo de ejemplo, veamos los tamaños de las antenas receptoras para un haz gaussiano, con un radio en el origen de 10 mm., para tres valores diferentes de frecuencia: 10 GHz, 100 GHz y 1000 GHz, cuando tenemos que salvar una distancia de 10 metros.

<i>10 GHz</i>	<i>9.542 metros de radio</i>
<i>100 GHz</i>	<i>0.954 metros de radio</i>
<i>1000 GHz</i>	<i>0.096 metros de radio</i>

teniendo en cuenta que con las tres antenas recogemos el mismo porcentaje de potencia¹.

En este capítulo se ha tomado como fuente básica para exponer la teoría de expansión modal, el artículo de D. H. Martin, "Long Waves Optics" [Martin, 93], por utilizar un desarrollo relativamente sencillo, pero completo. Además se realizan aportaciones originales, como pueden ser entre otras el estudio profundo de las características de los modos gaussianos de orden superior, el establecimiento de un criterio objetivo para fijar las condiciones de paraxialidad para estos modos, etc.

¹Estos resultados se calculan utilizando las fórmulas básicas que determinan la expansión de los haces gaussianos, presentadas, por ejemplo, en la referencia [Saleh, 91] en el capítulo dedicado a haces gaussianos.

2.1.1.- Representación modal.

Intentemos ahora, buscar posibles maneras de tratar una distribución general de campo, propagándose en un semiespacio sin fuentes. Optaremos por una representación modal; descompondremos el campo general, como una superposición de modos propios de este semiespacio. De esta manera, podremos ver cómo se propaga el campo general en el medio, viendo de una manera mucho más sencilla, cómo evolucionan los diferentes modos propios de una manera individual, teniendo en cuenta que estos modos propios juntos conforman la distribución de campo total.

En general, la propagación en el espacio libre de una distribución de campo coherente, con una frecuencia angular ω , esta gobernado por la ecuación de onda de Helmholtz,

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \quad (2.1)$$

donde \mathbf{F} es cualquier campo electromagnético \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{A} y k es el número de onda. Todos los campos varían igualmente con el tiempo como $e^{j\omega t}$, por simplificar la notación, omitiremos este término.

Para tratar la propagación de una estructura de campos, que denominaremos genéricamente haz (ya que posteriormente le supondremos cierto comportamiento paraxial), que satisface la ecuación 2.1, resulta muy útil considerar este haz como superposición de modos propios del espacio libre (paraxial).

Hablando con propiedad, las únicas estructuras que siendo solución de la ecuación de Helmholtz en el espacio libre pueden ser denominadas como modos, son aquellas que mantienen una distribución de amplitud y fase constante al propagarse por el medio. En este trabajo se propone trabajar con ciertas estructuras que siendo soluciones del espacio libre no mantienen su estructura de campos al propagarse por el medio, pero si mantienen la distribución de amplitud y fase en sucesivas secciones transversales pero con un cambio de escala. A estas estructuras, en las referencias [Goubau, 1961; Kogelnik, 1966; Martin, 78] se las denomina como modos de haz, sin embargo, por comodidad y para no confundirnos con el haz, que hace referencia a la distribución de campos en un semiespacio, nos referiremos a ellas con la palabra modo, entendiendo como modo aquella estructura de campos que es solución de la ecuación 2.1.

Las amplitudes relativas de cada uno de los modos que conforman un haz pueden ser determinadas si conocemos el campo del haz en un plano perpendicular al eje de propagación. Esto en la mayoría de las aplicaciones no será un problema demasiado grande, ya que normalmente tendremos las fuentes definidas precisamente en un plano perpendicular, que arbitrariamente lo podemos situar en $z = 0$.

Lo que resultará más o menos problemático, será la elección de una familia apropiada de soluciones de la ecuación de Helmholtz, es decir, una base adecuada de modos del espacio libre. En principio, no tenemos demasiadas limitaciones, ya que las condiciones de contorno que tenemos, que serían las que me harían definir por la utilización de una u otra familia, se reducen a definirnos los campos en un plano. Sin embargo, para cada tipo de aplicación, probablemente existirá una familia o base óptima, que se adapta mejor a la geometría del problema (probablemente fijada por la forma de las fuentes), necesitando un número menor de modos para representar el haz en cuestión.

Son varios los autores que han desarrollado diferentes análisis de la representación modal, así en [Goubau, 61] se hace un desarrollo vectorial completo, pero con un formalismo un poco oscuro. Otros autores [Kogelnik, 69; Martin, 78; Marcuse, 72], se han limitado a realizar un estudio de la representación escalar de los campos. Para poder recuperar las propiedades vectoriales de los campos, debemos desarrollar una representación que tenga en cuenta, precisamente, el carácter vectorial de los campos.

En primer lugar, utilizaremos las soluciones más básicas que podemos encontrar que son solución de la ecuación 2.1, las ondas planas. Desarrollaremos el haz como una superposición de ondas planas viajando en todas las posibles direcciones del espacio, introduciendo el concepto de espectro angular de ondas planas.

Esta representación mediante ondas planas, nos resultará de mucha utilidad, para llegar a una nueva representación modal más compleja, que puede entenderse más óptima, al reducir el número de modos necesarios para definir correctamente el haz, entendiendo como haz una distribución general de campo en el subespacio $z > 0$. Esta base la formarán los haces gaussianos de Gauss-Hermite, en coordenadas rectangulares y los de Gauss-Laguerre, en cilíndricas.

Espectro angular de ondas planas

Consideremos un haz propagándose en dirección del eje z , cuyos campos en el plano xy en $z = 0$ son conocidos. Esta será la condición de contorno necesaria para buscar una solución explícita de la ecuación de onda que representa la propagación de este haz en un semiespacio, $z > 0$, que estamos asumiendo libre de fuentes.

Una onda plana es una solución particular de la ecuación de onda; y sabemos que en los sistemas lineales, una solución general puede ser expresada como una superposición de soluciones particulares, en nuestro caso, ondas planas viajando en todas las direcciones posibles dentro del semiespacio $z > 0$. Con esto, todavía no hemos tenido en cuenta el carácter vectorial de los campos que estamos representando, para ello, tendremos que incluir en cada dirección posible dos polarizaciones ortogonales. Arbitrariamente, podremos elegir, como polarizaciones ortogonales en cada dirección, unas polarizaciones lineales, una tomando la componente x del campo eléctrico, y la otra tomando la componente y del campo. Si llamamos a estas dos polarizaciones P y Q respectivamente, podemos expresar el campo en el semiespacio, a partir de la superposición de cada polarización por separado, quedando el campo eléctrico totalmente definido mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} P(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \\ E_y(x, y, z) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde k_x , k_y , k_z , son las componentes de vector de onda, k , con un módulo, independiente de la dirección, de valor $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, denominado número de onda.

Cada una de las ecuaciones anteriores, es una integral sobre el espectro angular de ondas planas en cada polarización, $P(k_x, k_y)$ y $Q(k_x, k_y)$, siendo estas unas funciones dependientes de la dirección definida por el vector de onda, que contienen las amplitudes y fases relativas de las ondas planas que conjuntamente definen el haz. Para definir de una forma explícita la forma de las funciones P y Q , aplicaremos las condiciones de contorno, es decir, la distribución de campos en el plano en el que tenemos definidas las fuentes (que arbitrariamente lo podemos situar en $z = 0$). Particularizando las ecuaciones anteriores (2.2) para este caso, tenemos:

$$\begin{aligned}
E_x(x_o, y_o) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} P(k_x, k_y) e^{-j(k_x x_o + k_y y_o)} dk_x dk_y \\
E_y(x_o, y_o) &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} Q(k_x, k_y) e^{-j(k_x x_o + k_y y_o)} dk_x dk_y
\end{aligned} \tag{2.3}$$

donde x_o, y_o son las coordenadas de posición en el plano $z = 0$. Estas son relaciones de transformada de Fourier de dos dimensiones, por lo que aplicando la transformación inversa, podremos obtener las funciones escalares de espectro angular P y Q de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
P(k_x, k_y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(x_o, y_o) e^{j(k_x x_o + k_y y_o)} dx_o dy_o \\
Q(k_x, k_y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x_o, y_o) e^{j(k_x x_o + k_y y_o)} dx_o dy_o
\end{aligned} \tag{2.4}$$

donde se ha introducido un factor de normalización, que depende únicamente del convenio usado en la transformada de Fourier.

Desde el momento en que $E_x(x, y, z)$ y $E_y(x, y, z)$ son conocidos, mediante las ecuaciones de Maxwell podríamos determinar $E_z(x, y, z)$, completando el campo eléctrico, \mathbf{E} , y de la misma manera obtener todas las componentes de campo magnético \mathbf{H} . Así, con las dos funciones escalares de espectro angular $P(k_x, k_y)$ y $Q(k_x, k_y)$, describimos completamente los campos vectoriales en todo el semiespacio $z > 0$.

Es importante remarcar que la elección de polarizaciones ortogonales lineales no es la única posibilidad para establecer una base de ondas planas para describir completamente el haz. Por ejemplo, hubiéramos podido utilizar dos campos escalares que representen polarizaciones circulares a izquierda y derecha, o de la misma manera, utilizar el campo magnético \mathbf{H} , o el potencial \mathbf{A} , en lugar del campo eléctrico \mathbf{E} , ya que los tres cumplen la ecuación vectorial de Helmholtz. Según el problema que intentemos representar, siempre podremos encontrar un tipo de polarización y una variable vectorial electromagnética adecuados, para los que la representación del haz necesite un número mínimo de modos. Para los haces utilizados en sistemas milimétricos, el escoger una polarización lineal y trabajar con el campo eléctrico suele ser la mejor opción.

El concepto de espectro angular de ondas planas resulta de mucha utilidad, como se verá más adelante, para llegar a los modos de haz. Sin embargo, también tiene por sí solo una importante aplicación. Si las propiedades de un componente óptico planar se pueden expresar en términos de cambios de amplitud y fase de ondas planas incidentes, el efecto del componente sobre un haz de ancho finito puede ser calculado como descomposición del haz incidente en su espectro angular y poder reconstruir el efecto como suma de los efectos de las ondas planas constituyentes del haz. En otras palabras,

el haz muestrea las propiedades del componente sobre el rango de ángulos de incidencia; dando la relación de transformada de Fourier entre el campo y el espectro angular. La modificación del espectro angular por un componente óptico planar, no depende de la posición longitudinal del componente en relación al haz, ya que el espectro angular es el mismo para todo el semiespacio $z > 0$.

La ecuación 2.4, nos muestra la relación entre el espectro angular y el campo próximo, esto es, el campo de excitación, en el plano $z = 0$; las ecuaciones 2.5, 2.6 y 2.7, presentarán la relación directa entre el espectro angular y el campo lejano. La amplitud del campo en un punto distante en una dirección particular, es esencialmente la amplitud de la onda plana correspondiente del espectro angular. Se considera campo lejano cuando $k\rho \gg 1$, siendo ρ , la distancia a la que pretendemos calcular los campos. Para utilizar las expresiones del campo lejano, cambiamos el sistema de representación, y pasamos a un sistema de coordenadas esférico. Las expresiones de campo lejano en relación a las dos funciones escalares de espectro angular tienen la forma, [Martin, 93]

$$\begin{aligned} E_x(\theta, \phi) &= j2\pi k^2 \frac{e^{-jk\rho}}{k\rho} \cdot \cos\theta \cdot P(\theta, \phi) \\ E_y(\theta, \phi) &= j2\pi k^2 \frac{e^{-jk\rho}}{k\rho} \cdot \cos\theta \cdot Q(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde ρ , θ y ϕ son las componentes representativas del nuevo sistema de coordenadas esférico que modifican las expresiones de las componentes del vector de onda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k_x &= k \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi \\ k_y &= k \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \\ k_z &= k \cdot \cos\theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

Finalmente, expresando el campo eléctrico en las coordenadas esféricas, en campo lejano, $k\rho \gg 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} [E_r, E_\theta, E_\phi] &= j2\pi \cdot k^2 \cdot \frac{e^{-jk\rho}}{k\rho} \cdot \\ &[0, \cos\phi \cdot P(\theta, \phi) + \sin\phi \cdot Q(\theta, \phi), -\cos\theta \cdot \sin\phi \cdot P(\theta, \phi) + \cos\theta \cdot \cos\phi \cdot Q(\theta, \phi)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde, el factor $\frac{e^{-jk\rho}}{k\rho}$ de las expresiones anteriores, es el responsable de la forma esférica de los frentes de fase, pero esto sólo será cierto en el campo lejano de haz cuando $P(k_x, k_y)$ y $Q(k_x, k_y)$ sean números reales o imaginarios puros. Esto debería ocurrir únicamente en el caso en que tengamos un campo incidente con una fase uniforme y una distribución de amplitud con un centro de simetría inversa.

La representación de espectro angular de ondas planas da una descripción completa de los campos del haz incidente; pero no existe ninguna forma de que esto nos permita el cálculo directo de la modificación del haz producida por un reflector de sección cónica o una lente (y lo mismo podríamos decir de las representaciones alternativas en términos de superposiciones de ondas cilíndricas o de armónicos esféricos).

A continuación, presentamos una nueva formulación particular de la representación modal, más apropiada para el diseño de sistemas ópticos de onda larga.

Modos gaussianos

Vamos a buscar otra representación modal para cada una de las dos componentes vectoriales del campo eléctrico, expresadas en la ecuación 2.2. Denominaremos un campo escalar como $\Psi(x,y,z)$ y un espectro angular como $A(k_x, k_y)$. Esto nos permitirá expresar el campo incidente como una onda plana modulada,

$$\Psi(x, y, z) = u(x, y, z) \cdot e^{-jkz} \quad (2.8)$$

y concentrar nuestra atención en la función moduladora $u(x,y,z)$. La relación entre $u(x,y,z)$ y $A(k_x, k_y)$ puede ser representada mediante una transformada de Fourier, de la siguiente manera:

$$u(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ A(k_x, k_y) \cdot e^{j(k-k_z)z} \right\} \cdot e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.9)$$

el campo en un plano z , se evalúa como una transformada inversa de Fourier de $A(k_x, k_y) \cdot e^{j(k-k_z)z}$ tratando paramétricamente la variable z ,

$$u(x, y, z) = FT \left\{ A(k_x, k_y) \cdot e^{j(k-k_z)z} \right\} \quad (2.10)$$

donde,

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (2.11)$$

y será positivo (y real) cuando $k_x^2 + k_y^2 < k^2$, el haz se propaga dentro del semiespacio $z > 0$, y será negativo (e imaginario) para $k_x^2 + k_y^2 > k^2$, dando lugar a ondas evanescentes con decrecimiento exponencial. Esto significa, haciendo notar que la transformada inversa de Fourier de $A(k_x, k_y)$ es el campo en el plano $z = 0$, que $u(x,y,z)$ es la convolución del campo en el plano $z = 0$ con la transformada inversa de Fourier del término exponencial $e^{j(k-k_z)z}$,

$$u(x, y, z) = u(x, y, 0) * FT \left\{ e^{j(k-k_z)z} \right\} \quad (2.12)$$

siendo esta ecuación la principal relación que gobierna la propagación. Sin embargo, esta relación (2.12), no nos permite una representación explícita útil sin hacer una suposición paraxial concerniente al espectro angular del haz, suponiendo que $A(k_x, k_y)$ cae suficientemente al incrementar k_x y k_y . Al evaluar $u(x, y; z)$ a partir de la ecuación 2.10, consideraremos únicamente el primer término del desarrollo del factor, $e^{j(k-k_z)z}$, en potencias de $k_x^2 + k_y^2 / k^2$,

$$e^{j(k-k_z)z} = e^{j\left\{kz - k\sqrt{1 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2}}z\right\}} = e^{j\left\{\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}z + \dots\right\}}, \quad (2.13)$$

(los efectos de esta aproximación serán estudiados más adelante) reduciendo la ecuación 2.12 a la expresión paraxial siguiente,

$$u(x, y; z) = u(x, y; 0) * FT \left\{ e^{j\frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}z} \right\}, \quad (2.14)$$

que resolviendo la transformada de Fourier, obtenemos finalmente,

$$u(x, y; z) = u(x, y; 0) * \frac{j2\pi k}{z} \cdot e^{\frac{-jk(x^2 + y^2)}{2z}}. \quad (2.15)$$

El campo en el plano z , está relacionado con el plano en el que tenemos definidas las fuentes $z = z_S$, de la siguiente manera:

$$u(x, y; z) = u(x, y; z_S) * \frac{j2\pi k}{z - z_S} \cdot e^{\frac{-jk(x^2 + y^2)}{2(z - z_S)}}. \quad (2.16)$$

A.- Coordenadas rectangulares: Funciones de Gauss-Hermite.

Existe una ventaja en representar los campos incidentes, $u(x, y; z_S)$ como una superposición de funciones de Gauss-Hermite, ya que estas funciones forman un conjunto completo (lo que significa que cualquier función que se comporte adecuadamente, se puede representar como una superposición con los debidos coeficientes) y porque de manera separada, cumplen una serie de propiedades de la transformada de Fourier que se adaptan muy bien a las relaciones entre el campo del haz y su espectro angular, y propiedades de la convolución adaptadas a la propagación de la relación anterior. Las funciones de Gauss-Hermite en dos dimensiones normalizadas son:

$$\begin{aligned}
u_{mn}(x, y; z_S) = & \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1}} \pi m! n! \sqrt{\varpi_{Sx}} \sqrt{\varpi_{Sy}}} \\
& \left\{ H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{\varpi_{Sx}} \right) \cdot e^{-\frac{x^2}{\varpi_{Sx}^2}} \right\} \cdot \left\{ e^{-j \frac{kx^2}{2R_{Sx}}} \right\} \cdot \left\{ e^{j \left(m + \frac{1}{2} \right) \Theta_{Sx}} \right\} \\
& \left\{ H_n \left(\sqrt{2} \frac{y}{\varpi_{Sy}} \right) \cdot e^{-\frac{y^2}{\varpi_{Sy}^2}} \right\} \cdot \left\{ e^{-j \frac{ky^2}{2R_{Sy}}} \right\} \cdot \left\{ e^{j \left(n + \frac{1}{2} \right) \Theta_{Sy}} \right\}
\end{aligned} \quad (2.17)$$

donde $H_m(X)$ y $H_n(Y)$ denotan los polinomios de Hermite de órdenes m y n respectivamente ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) [Abramowitz, 64], ϖ_{Sx} , R_{Sx} , Θ_{Sx} y ϖ_{Sy} , R_{Sy} , Θ_{Sy} son constantes reales independientes de x , y , m y n .

El campo en el plano $z = z_S$, puede ser expresado como una superposición de funciones de Gauss-Hermite, de la siguiente manera:

$$u(x, y; z_S) = \sum_{m,n} C_{mn} u_{mn}(x, y; z_S) \quad (2.18)$$

siendo,

$$C_{mn} = \int \int_{-\infty}^{+\infty} u_{mn}^*(x, y; z_S) \cdot u(x, y; z_S) dx dy \quad (2.19)$$

donde C_{mn} , son los coeficientes de correlación entre los diferentes modos² de la base (funciones de Gauss-Hermite) y la distribución real de los campos.

Para formas especiales de $u(x, y; z_S)$, la elección adecuada de los valores ϖ_{Sx} , ϖ_{Sy} , R_{Sx} , R_{Sy} , Θ_{Sx} y Θ_{Sy} puede generarnos unos coeficientes C_{mn} reales; generalmente C_{mn} serán números complejos. La libertad de escoger los valores para ϖ_{Sx} , ϖ_{Sy} , R_{Sx} , R_{Sy} , Θ_{Sx} y Θ_{Sy} será vital, para poder establecer una elección óptima de estos valores, con tal de que el número de funciones que tengamos que emplear para obtener una buena representación sea mínimo.

Para poder simplificar un poco los desarrollos posteriores, consideraremos a partir de ahora:

$$\begin{aligned}
\varpi_{Sx} &= \varpi_{Sy} = \varpi_S, \\
R_{Sx} &= R_{Sy} = R_S, \\
\Theta_{Sx} &= \Theta_{Sy} = \Theta_S
\end{aligned} \quad (2.20)$$

con lo que reducimos el número de parámetros de seis a tan sólo tres (ϖ_S , R_S , Θ_S). Esto no restringe nuestro análisis a haces no-astigmatismos (2.20), ya que los haces con astigmatismo pueden ser representados como una superposición de funciones sin

² No sería correcto en este caso referirse a estas estructuras con la palabra modo, ya que no mantienen su distribución de campos invariante mientras se propagan por el medio, pero ya hemos comentado, que

astigmatismo (necesitaremos utilizar un número mayor de funciones, que si utilizáramos las funciones astigmáticas). Nuestro análisis podría ser absolutamente general si incluimos las funciones astigmáticas, pero la complejidad de las expresiones sería demasiado grande para poder hacer un desarrollo inteligible. Por lo tanto, en la superposición de la ecuación 2.18, que describe los campos en el plano $z = z_s$, únicamente tendremos en cuenta las funciones no astigmáticas, que serán de la forma:

$$u_{mn}(x, y, z_s) = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi m! n!}} \cdot \frac{1}{w_s} \cdot \left\{ H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{w_s} \right) \cdot H_n \left(\sqrt{2} \frac{y}{w_s} \right) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{w_s^2}} \right\} \cdot \left\{ e^{-jk \frac{x^2+y^2}{2R_s}} \right\} \cdot \left\{ e^{j(m+n+1)\Theta_s} \right\} \quad (2.21)$$

Teniendo descrito el campo en el plano fuente, $z = z_s$, como una superposición de funciones, podemos usar la relación de convolución anterior (2.16), para encontrar el campo en un plano z arbitrario. En [Martin, 93] se demuestra que la convolución entre una función de Gauss-Hermite,

$$H_n(X) \cdot e^{-\frac{X^2}{2}} \cdot e^{-j\frac{BX^2}{2}} \quad (2.22)$$

con una función gaussiana,

$$e^{-j\frac{AX^2}{2}} \quad (2.23)$$

para valores reales de A y B , da como resultado una función de Gauss-Hermite similar, con el argumento escalado y con un término añadido de curvatura y fase, de la manera siguiente,

$$\sqrt{-j\frac{2\pi}{|\alpha|}} \cdot H_n(X') \cdot e^{-\frac{X'^2}{2}} \cdot e^{-j\frac{B'X'^2}{2}} \cdot e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta} \quad (2.24)$$

donde,

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv 1 + j(A + B) \\ B' &\equiv \frac{1 + B(A + B)}{A} \\ X' &\equiv \frac{AX}{|\alpha|} \\ \theta &\equiv \tan^{-1} \left(\frac{1}{A + B} \right) \equiv \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (A + B)^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

debido a que son soluciones de la ecuación de onda paraxial (suponiendo una expansión de la energía pequeña), los podemos seguir denominando como modos.

Esto nos permite expresar el campo total $u(x,y,z)$ como una superposición de modos de haz definidos por las funciones de Gauss-Hermite,

$$u(x, y, z) = \sum_{m, n} C_{mn} u_{mn}(x, y, z) \quad (2.26)$$

donde los coeficientes C_{mn} son los mismos que antes, teniendo en cuenta que las funciones $u_{mn}(x,y,z)$ son los conocidos modos de haz de Gauss-Hermite,

$$u_{mn}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi m! n!}} \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \left\{ H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{\varpi} \right) \cdot H_n \left(\sqrt{2} \frac{y}{\varpi} \right) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{\varpi^2}} \right\} \cdot \left\{ e^{-jk \frac{x^2+y^2}{2R}} \right\} \cdot \left\{ e^{j(m+n+1)\Theta} \right\} \quad (2.27)$$

siendo ϖ , R y Θ funciones de z , definidas de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \varpi^2 &= \varpi_0^2 + \left(\frac{2(z - z_0)}{k\varpi_0^2} \right)^2 \\ R &= (z - z_0) + \frac{\left(\frac{k\varpi_0^2}{2} \right)^2}{(z - z_0)} \\ \Theta &= \tan^{-1} \left\{ \frac{k\varpi^2}{2R} \right\} + \Theta_0 = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{k\varpi^2} \right)^2}} \right) + \Theta_0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde las constantes ϖ_0 , z_0 y Θ_0 están relacionadas con los valores ϖ_s , R_s y Θ_s , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varpi_0^2 &= \frac{\varpi_s^2}{1 + \left(\frac{k\varpi_s^2}{2R_s} \right)^2} \\ z_0 &= z_s - \frac{R_s}{1 + \left(\frac{2R_s}{k\varpi_s^2} \right)^2} \\ \Theta_0 &= \Theta_s - \tan^{-1} \left\{ \frac{k\varpi_s^2}{2R_s} \right\} = \Theta_s - \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R_s}{k\varpi_s^2} \right)^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Es necesario dar las dos formas diferentes de calcular Θ , para poder discernir claramente el cuadrante que le corresponde; con la función arcotangente podremos

determinar si Θ está en los cuadrantes impares (I y III) o en los pares (II y IV), y con la función arcoseno también tenemos la incertidumbre de un par de cuadrantes, o bien I y II o III y IV, pero será la intersección de ambas soluciones lo que nos definirá el cuadrante definitivo.

En $z = z_0$, $\varpi(z)$ adopta el valor mínimo, ϖ_0 , y $R(z)$ tiende a infinito (lo que significa frente de fase plano, como se verá más adelante), a este punto se le conoce como cintura del haz o ancho mínimo del modo de haz. Si R_S es negativo, $z_0 > z_S$; el haz converge si se propaga desde $z = z_S$ hacia $z = z_0$ y diverge más allá de z_0 . Si R_S es positivo, $z_0 < z_S$, el haz diverge al propagarse desde $z = z_S$, con una cintura de haz situada en $z = z_0$.

El término

$$H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{\varpi}\right) \cdot H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{\varpi}\right) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{\varpi^2}}, \quad (2.30)$$

de la ecuación 2.27, nos muestra la forma de variación del módulo del modo de haz de orden mn , en un plano perpendicular a la dirección de propagación. Esta forma corresponde a un haz gaussiano de argumento (x^2+y^2) modulado por los polinomios H_m y H_n . Los argumentos de los cuales, son las variables x e y escaladas con el parámetro de ancho del haz ϖ , que depende de la posición z . Para mantener la misma relación $x/\varpi(z)$ o $y/\varpi(z)$, si el denominador varía con z según una expresión determinada (2.28), los numeradores también deberán hacerlo de la misma manera para mantener constante la relación. Teniendo en cuenta esto, y que la función $\varpi(z)$ es creciente en cierto intervalo, en ese mismo intervalo, los formas de los campos también se ensancharán de la misma manera. Esta expansión de la distribución de campo cuando se propaga es lo que se conoce como difracción del haz.

Por otro lado, el término

$$e^{-jk \frac{x^2+y^2}{2R}}, \quad (2.31)$$

es el de mayor importancia en cuanto a la forma de los frentes de fase se refiere, ya que nos da una idea de la variación de fase del campo del modo de haz sobre un plano perpendicular al eje de propagación, relativa al valor de la fase en el eje. La forma de este término indica, bajo suposición paraxial, que tenemos frentes de fase esféricos con un radio de curvatura, R . El valor de este radio varía con la distancia de una manera no lineal, esto significa que la localización de los centros de curvatura de las superficies equifase varía con la distancia. Este es un segundo aspecto de la difracción del haz.

El tercer factor importante de la ecuación 2.27,

$$e^{j(m+n+1)\Theta}, \quad (2.32)$$

es un factor de fase, que indica la fase sobre el eje de un modo en particular, en relación a la fase de una onda plana $(kz - \omega t)$. Este desfase es la tercera consecuencia de la difracción. Θ será entonces la diferencia de fase entre los modos de haz, o lo que es lo mismo, la diferencia de fase entre modos de haz consecutivos.

El último factor que nos queda, es un factor de normalización de potencia, esto significa que la integral de $u_{mn}^* u_{mn}$ en cualquier plano de z constante, tiene un valor unitario.

B.- Coordenadas cilíndricas: Funciones de Gauss-Laguerre.

Las funciones de Gauss-Laguerre son otra representación alternativa, mejor adaptadas a ondas con formas cilíndricas que las representaciones de ondas planas, ya que el número de modos propios necesarios para definir el haz correctamente es menor. En algunos casos, el haz coincidirá con un solo modo propio del medio.

Al tener que utilizar ahora coordenadas cilíndricas, aprovecharemos para cambiar ligeramente la nomenclatura; ya que, por ejemplo, hasta ahora, con dos subíndices teníamos todo absolutamente definido, conocido el sistema de coordenadas origen. Ahora al trabajar en coordenadas cilíndricas, tenemos la necesidad de incorporar un tercer índice, que nos indica el ángulo de rotación de los modos, con respecto al sistema de coordenadas origen.

De esta manera, los tres subíndices que utilizaremos ahora serán:

a , índice que me indicará las variaciones radiales, y que afectará a la variable r del sistema de coordenadas cilíndrico.

b , índice que me indicará las variaciones azimutales, actuará sobre la variable angular φ ,

φ_0 , posición angular inicial de los modos.

De igual manera, podremos definir, un campo escalar como una onda plana modulada,

$$\Psi_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z) = u_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z) \cdot e^{-jkz} \quad (2.33)$$

siendo $\Psi_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z)$, un campo escalar, pudiendo establecer la misma relación de las funciones $u_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z)$ y su espectro de ondas planas, a través de la transformada de Fourier, llegando a una expresión similar a la expresión 16, de la que podemos conocer

el campo en cualquier plano z , una vez conocida la distribución en el plano fuente $z = z_S$.

Ahora, en lugar de utilizar las funciones de Gauss-Hermite para representar las fuentes, utilizaremos las funciones Gauss-Laguerre, y aplicando de la misma manera la convolución para el cálculo de los campos en todo el semiespacio (2.16), obtenemos una expresión normalizada [Martin, 93]:

$$u_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} \Gamma(b+1) \cdot \binom{a+b}{a}}} \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \cos(b\varphi - \varphi_0) \cdot \left(\frac{r\sqrt{2}}{\varpi}\right)^b \cdot L_a^{(b)}\left(\frac{2r^2}{\varpi^2}\right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\varpi^2}} \cdot e^{-j\frac{k r^2}{2R}} \cdot e^{j(b+2a+1)\Theta} \quad (2.34)$$

donde definiendo,

$$\zeta(z) = \frac{\lambda(z - z_0)}{\pi \varpi_0^2} \quad (2.35)$$

y el ancho de haz, ϖ , el radio de curvatura, R , la fase Θ , están definidos:

$$\varpi(z)^2 = \varpi_0^2 (1 + \zeta(z)^2) \quad (2.36)$$

$$R(z) = (z - z_0) \left[1 + \left(\frac{1}{\zeta(z)^2} \right) \right] \quad (2.37)$$

$$\Theta(z) = \tan^{-1}(\zeta(z)) + \Theta_0 = \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\zeta(z)} \right)^2}} \right) + \Theta_0 \quad (2.38)$$

siendo $L_a^{(b)}$ los polinomios de Laguerre generalizados, λ la longitud de onda en el medio correspondiente, ϖ_0 el valor de la cintura de haz que caracterizará a toda una familia y z_0 su posición (tenemos que tener en cuenta que ahora $\Theta_0 = \varphi_0$, sin embargo, en la fórmula (2.38) mantenemos Θ_0 , para no cambiar la nomenclatura, utilizada hasta ahora).

De la misma manera, que en el caso de las funciones de Gauss-Hermite, podemos relacionar ϖ_0 , z_0 y Θ_0 , valores en la posición de la cintura de haz, con los valores ϖ_S , R_S y Θ_S , en el plano donde tenemos definidos las fuentes.

$$\begin{aligned}
\varpi_0^2 &= \frac{\varpi_s^2}{1 + \left(\frac{k\varpi_s^2}{2R_s} \right)^2} \\
z_0 &= z_s - \frac{R_s}{1 + \left(\frac{2R_s}{k\varpi_s^2} \right)^2} \\
\Theta_0 &= \Theta_s - \tan^{-1} \left\{ \frac{k\varpi_s^2}{2R_s} \right\} = \Theta_s - \sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2R_s}{k\varpi_s^2} \right)^2}} \right)
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Se puede comprobar, que en este caso (2.34), tenemos el mismo tipo de ecuación, que en el caso de la funciones de Gauss-Hermite (2.27), con la única diferencia, de que ahora, en el lugar de utilizar las funciones de Hermite para ‘modular’ el término gaussiano, tenemos unas funciones diferentes,

$$\left(\frac{r\sqrt{2}}{\varpi} \right)^b \cdot \cos(b\varphi - \varphi_0) \cdot L_a^{(b)} \left(\frac{2r^2}{\varpi^2} \right) \tag{2.40}$$

compuestas por tres factores, los dos primeros, gobernados por el índice azimutal, b . El primero nos determinará el número de ceros que tiene la función en el eje, que será igual al número menos uno de derivadas nulas en el eje, lo que nos define la anchura del nulo central. El segundo, nos definirá claramente, las variaciones azimutales de estas funciones ‘moduladoras’. Y finalmente, el tercero, los polinomios generalizados de Laguerre, que dependen de los índices radial y azimutal, y que dan nombre a estas soluciones de la ecuación de Helmholtz.

Las constantes de normalización de la potencia, también son diferentes, pero estas diferencias no son relevantes, en cuanto a la forma de las soluciones.

2.1.2.- Consideraciones sobre paraxialidad.

Con la ecuación 2.12, se demuestra que el campo en un plano perpendicular al eje de propagación, $u(x,y,z)$, está relacionado con el campo en el plano $z = z_s$, donde tenemos definidas las fuentes, mediante la convolución con la transformada de Fourier de la exponencial,

$$e^{j(k-k_z)(z-z_s)} \tag{2.41}$$

y es precisamente, evaluando esta transformada de Fourier, cuando hemos hecho la aproximación paraxial; hemos desarrollado en serie de potencias de $k_x^2 + k_y^2 / k^2$ la exponencial anterior, quedándonos únicamente con el primer término de esta serie.

Si quisiéramos considerar el primer término despreciado, deberíamos convolucionar cada modo de haz calculado, con la transformada de Fourier de la exponencial,

$$e^{j \frac{k_x^2 + k_y^2}{8k^4} - k(z-z_s)} \quad (2.42)$$

De la teoría de transformadas, podemos ver que un valor grande de $k(z-z_s)$, equivale, en el dominio transformado, a una señal muy ancha, que tiene una influencia grande en la convolución.

El error mayor que cometemos, es para valores grandes y lejanos de z , es decir, en el campo lejano,

$$\tilde{z} \gg 1 \quad (2.43)$$

donde,

$$\tilde{z} = \frac{2 \cdot (z - z_s)}{k \varpi_0^2} \quad (2.44)$$

Sin embargo, conocemos una solución exacta [Martin, 93] para el campo lejano, de tal manera que podemos calcular directamente la magnitud de la corrección de no paraxialidad. La solución exacta, ecuación (2.5), con $P(\theta, \phi)$, tomando la forma adecuada que tiene un haz en el plano fuente, una fase uniforme y una distribución gaussiana de la amplitud con un parámetro de ancho ϖ_0 , da la siguiente expresión de la intensidad en campo lejano,

$$S_F = |E(\theta, \phi)|^2 \quad (2.45)$$

como una función del ángulo sobre el eje, θ , que si la relacionamos con el valor en el eje [Martin, 93],

$$\frac{S_F(\theta)}{S_F(0)} = \cos^2 \theta \cdot e^{-\frac{2 \sin^2 \theta}{\left(\frac{2}{k \varpi_0}\right)^2}} \quad (2.46)$$

(La transformada de Fourier de una función gaussiana con una cintura ϖ_0 , es la misma función gaussiana con un nuevo valor de cintura $2/\varpi_0$; el $\sin^2 \theta$ viene de sustituir $(k_x^2 + k_y^2)$ por $k^2 \sin^2 \theta$.)

Para comparar, esta expresión exacta, con la solución de modo de haz, es necesario, hacer tender a infinito $(z-z_s)$ en la expresión 2.27, y buscar el resultado en una

superficie esférica de radio ρ constante, en lugar de sobre un plano de z constante. Haciendo esto, podemos comprobar que la intensidad sobre el eje decrece como $(z-z_S)^{-2}$ en el campo lejano, y aplicando trigonometría, podemos aproximar,

$$\frac{(x^2 + y^2)}{(z - z_S)^2} = \tan^2 \theta \quad (2.47)$$

Por lo tanto, la expresión del campo lejano bajo la suposición de paraxialidad, quedará de la siguiente forma [Martin, 93]:

$$\frac{S_F(\theta)}{S_F(0)} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot e^{-\frac{2 \tan^2 \theta}{\left(\frac{2}{k\varpi_0}\right)^2}} \quad (2.48)$$

Las dos expresiones, la exacta y la incorrecta debido a la no paraxialidad, ecuaciones 2.46 y 2.48, están representadas en la figura 2.1, para cuatro valores diferentes de $k\varpi_0$.

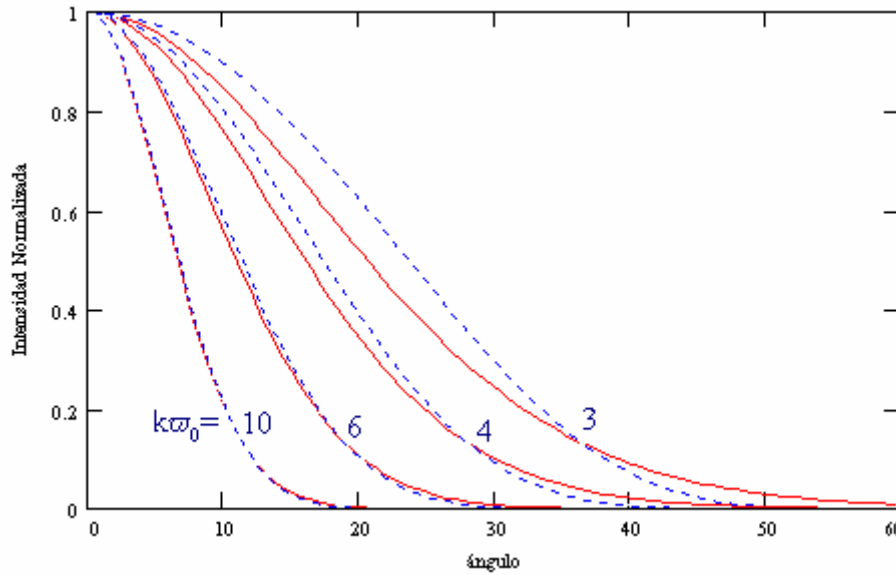


Figura 2.1. Distribución de intensidad normalizada en campo lejano, para una distribución gaussiana en el plano fuente. Cuando el parámetro, $k\varpi_0$, toma los valores 3, 4, 6 y 10. La línea continua corresponde a la solución exacta (2.46), y la discontinua a la paraxial (2.48).

Se puede observar, que para el caso de $k\varpi_0 = 10$, prácticamente no hay diferencias entre las dos curvas, mientras que para el valor de $k\varpi_0 = 3$, las diferencias son bastante significativas. El valor de $k\varpi_0 = 6$, parece ser el límite aceptable entre el necesitar o no la corrección para las ecuaciones paraxiales. Vistos estos resultados, sería aceptable adoptar el criterio de diseño de sistemas, teniendo en cuenta que, para cometer un error pequeño en campo lejano, deberemos cumplir

$$k\varpi_0 \gg 6. \quad (2.49)$$

Esta será la condición de paraxialidad que utilizaremos a partir de ahora.

Para modos de orden superior, la corrección en el campo lejano, será del mismo tipo que la aplicada sobre el modo fundamental. Sin embargo, los modos de orden superior, generados a partir de las funciones Gauss-Hermite y Gauss-Laguerre, para un valor concreto de ϖ_0 , tienen los picos más relevantes alejados del eje, y se alejan más cuanto mayores son los índices de los modos. Por ello, necesitaremos afinar un poco más en la definición de la condición de paraxialidad para estos modos de orden superior.

Cuando estudiemos más en profundidad los modos de orden superior, volveremos a plantearnos el problema de la paraxialidad presentando un nuevo criterio de paraxialidad para estos modos.

Un sistema óptico podría ser diseñado bajo la suposición $k\varpi_0 \gg 6$, no únicamente para eliminar los errores debidos a la paraxialidad del haz, sino también porque los componentes pueden no tener unas grandes prestaciones en todo el espectro angular de ondas planas, y podrían generar modos espurios. Los requerimientos sobre el conjunto de $k\varpi_0$ por esta última consideración deberían ser más restrictivos que la condición de paraxialidad de la ecuación 2.49.

En la literatura, existen algunos análisis de la no paraxialidad [Couture, 81; Cullen, 79], que mantienen el campo del modo de haz en el campo lejano y modifican el campo cercano. Sin embargo, los haces transmitidos y recibidos en los sistemas ópticos reales, están generalmente definidos precisamente por el campo cercano, por ejemplo, las bocinas alimentadoras de antenas. En este caso, se fija el campo cercano, y se aplican las correcciones pertinentes sobre el campo lejano, [Friberg, 92].

2.2.- Características principales de los modos gaussianos.

En este apartado, revisaremos diferentes características importantes de los modos gaussianos, independientemente del sistema de representación elegido, ya sean coordenadas rectangulares o cilíndricas, utilizando las funciones de Gauss-Hermite y Gauss-Laguerre respectivamente.

Primero presentaremos un estudio de la forma de expansión, así como de las formas de los frentes de fase, para el modo fundamental. Es importante hacer ver, que el modo fundamental en el caso de utilizar las funciones de Gauss-Hermite o las de Gauss-Laguerre, tiene exactamente la misma forma.

Con este estudio detallado del modo fundamental, se pretende dar una visión rápida de la situación del diseño de guías cuasi-ópticas para este modo, para posteriormente, poder evaluar, comparando resultados, los errores que cometemos al aplicar esas mismas técnicas para el diseño de guías cuasi-ópticas para modos de orden superior.

2.2.1.- Modo gaussiano fundamental

Tanto si utilizamos unas funciones u otras, la expresión de los campos para el modo fundamental, quitando posibles constantes de normalización que no afectan a la forma del modo, es:

$$u_{0,0}(x, y, z) = u_0^o(r, \varphi, z) = \frac{\varpi_0}{\varpi} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{\varpi^2}} \cdot e^{-j\frac{k(x^2+y^2)}{2R}} \cdot e^{j\Theta} = \frac{\varpi_0}{\varpi} \cdot e^{-\frac{r^2}{\varpi^2}} \cdot e^{-j\frac{kr^2}{2R}} \cdot e^{j\Theta} \quad (2.50)$$

donde ϖ , R y Θ están definidas según las ecuaciones 2.36, 2.37 y 2.38 respectivamente. Como se puede observar, sabiendo que $r^2 = x^2 + y^2$, las dos representaciones son idénticas.

A partir de aquí, el estudio va a ser independiente del método de representación utilizado. En este caso del modo fundamental, nos resultará más cómodo trabajar con las coordenadas cilíndricas, debido a la simetría de revolución que presenta este modo (se puede ver directamente con la no aparición de la variable φ en la ecuación 2.50).

Como se puede observar en la ecuación 2.50, tenemos muy bien diferenciados los términos del módulo y de la fase, no afectándose entre si; el término del módulo es siempre positivo, y el de la fase es de módulo unitario. Debido a este comportamiento

independiente del módulo y la fase, los podremos estudiar por separado sin ninguna pérdida de información.

Módulo del modo gaussiano fundamental

La expresión del módulo de la función escalar de campo de un haz gaussiano fundamental es la siguiente:

$$\|\Psi_0^0\| = \frac{\varpi_0}{\varpi} \cdot e^{-\frac{r^2}{\varpi^2}} \quad (2.51)$$

donde ϖ es una función de z , que tiene la forma,

$$\varpi(z) = \varpi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{k\varpi_0^2} \right)^2}, \quad (2.52)$$

donde hemos centrado arbitrariamente el haz gaussiano en $z = 0$, ya que siempre podremos trabajar haciendo esta suposición, simplificando las expresiones. Por otro lado, en prácticamente toda la literatura de óptica gaussiana, la variable z_0 , se utiliza para expresar la *profundidad de haz* o *distancia de Rayleigh*.

Distancia de Rayleigh o profundidad de haz

Se define como la distancia a la cual el ancho de haz es $\sqrt{2}$ veces el ancho mínimo del haz, la cintura, ϖ_0 ,

$$\varpi(z)|_{z=z_0} = \varpi_0 \sqrt{2} \Rightarrow z_0 = \frac{k\varpi_0^2}{2}; \quad (2.53)$$

teniendo en cuenta esto, podríamos volver a escribir la ecuación 2.52,

$$\varpi(z) = \varpi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}. \quad (2.54)$$

Una propiedad importante, que explica la elección del factor $\sqrt{2}$ en la definición de la profundidad de haz, es que la intensidad de campo en el eje disminuye, en esta distancia z_0 , a la mitad.

Intensidad de campo

La intensidad de campo está definida como el módulo al cuadrado de la función de campo escalar, ecuación 2.50, y tiene la siguiente forma:

$$I(r, \varphi, z) = I_0 \left(\frac{\varpi_0}{\varpi(z)} \right)^2 e^{-\frac{2r^2}{\varpi(z)^2}} \quad (2.55)$$

particularizando esta ecuación en el eje ($r = 0$), tendremos:

$$I(0, \varphi, z) = I_0 \left(\frac{\varpi_0}{\varpi(z)} \right)^2 = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} \quad (2.56)$$

Resulta obvio, de la ecuación 2.56, que para el caso de $z = z_0$, la intensidad en el eje es de un valor mitad que el valor inicial I_0 .

En la figura 2.2, tenemos representada la distribución de intensidad normalizada para diferentes valores de distancia, para poder observar el efecto de ensanchamiento que se produce en las estructuras gaussianas, conforme se va propagando. También, en la misma figura, tenemos representada la intensidad de campo en el eje central de revolución del haz ($r = 0$), para poder comprobar el hecho anteriormente mencionado, a una distancia igual a z_0 , la intensidad en el eje ha caído a la mitad.

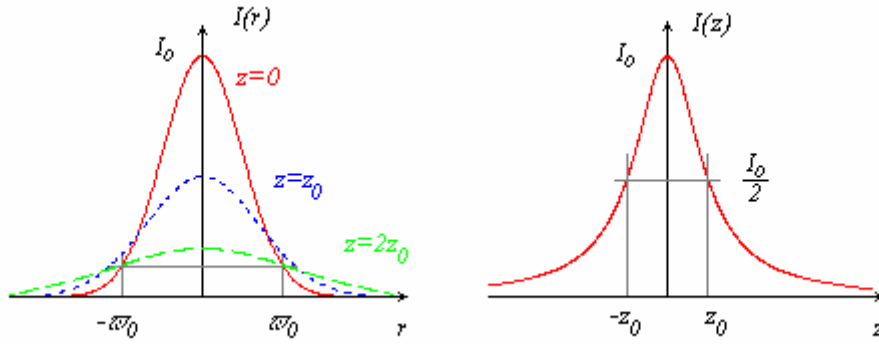


Figura 2.2 Distribución de la intensidad de campo normalizada, para tres valores diferentes de distancia, $z=0$, $z=z_0$ y $z=2z_0$, (gráfica de la izquierda), y sobre el eje ($r = 0$) (gráfica de la derecha).

Podría sernos útil conocer la potencia que transporta el haz, y más concretamente la contenida dentro de un círculo centrado en el eje con cierto valor del radio. Por ejemplo, nos resultará muy útil para evaluar las pérdidas producidas por el efecto de difracción, al incidir sobre un componente de unas determinadas dimensiones físicas.

Potencia transportada por un haz gaussiano

La potencia que transporta un haz gaussiano, la podemos calcular como la integral de superficie de la intensidad de campo (2.55),

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(r, \varphi, z) r dr d\varphi, \quad (2.57)$$

como en este caso tenemos simetría de revolución, podemos reducir esta integral doble a una simple de la forma:

$$P = \int_0^\infty I(r, \varphi, z) 2\pi r dr \quad (2.58)$$

que para una distancia z dada, tiene el valor,

$$P = \frac{1}{2} I_0 (\pi \varpi_0^2). \quad (2.59)$$

Así, la potencia que transporta el haz es la mitad de la intensidad de campo máxima multiplicada por el área efectiva del haz, definida por el radio ϖ_0 . Normalmente los haces se definen por la potencia y no por la intensidad de pico. De tal manera que la ecuación 2.55 nos puede resultar de mayor utilidad, sustituyendo I_0 (despejando de la ecuación 2.59), por parámetros más conocidos como la potencia total y el valor de cintura del haz, quedando finalmente,

$$I(r, \varphi, z) = \frac{2P}{\pi \varpi(z)^2} \cdot e^{-\frac{2r^2}{\varpi(z)^2}}. \quad (2.60)$$

La relación entre la potencia encerrada dentro de un círculo de radio r_0 en un plano transversal en la posición z , y la potencia total es

$$\frac{1}{P} \int_0^{r_0} I(r, \varphi, z) 2\pi r dr = 1 - e^{-\frac{2r_0^2}{\varpi(z)^2}}. \quad (2.61)$$

Así, la potencia encerrada por un círculo de radio $r_0 = \varpi(z)$ es aproximadamente de un 86 % de la potencia total, y con un radio de $1.5\varpi(z)$ encerramos el 99 % de la potencia.

Hasta ahora hemos hablado mucho de la función ancho de haz $\varpi(z)$, pero realmente no hemos explicado lo que significa, lo único que conocemos de ella, es que delimita el 86 % de la potencia total que se propaga en el haz, y este parece un número sin ningún sentido físico.

Función de ancho del haz

Para tener una idea de cómo está definido este ancho de haz, escogeremos un radio que varíe exactamente de la misma manera que la función ancho de haz, es decir,

$$r = \varpi(z) = \varpi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad (2.62)$$

la expresión 2.51 normalizada y particularizada para este valor de r , quedará de la siguiente forma:

$$\|\Psi_0^0\| = \frac{1}{e} \quad (2.63)$$

siendo esta la explicación física del ancho de haz. El ancho de haz estará definido como un radio, función de z , en el que el valor del campo es $1/e$ veces menor que el valor del máximo. Ya veremos cuando estudiemos los modos de orden superior, que tendremos que redefinir este parámetro, ya que los criterios aplicados en este caso particular, no son aplicables al resto de modos.

La función ancho de haz, tiene simetría par, un mínimo en $z = 0$, y es creciente al aumentar $|z|$. En la figura 2.3, tenemos representadas varias funciones ancho de haz para diferentes valores de ϖ_0 , con las que se puede comprobar que un valor pequeño de ϖ_0 , implica una mayor difracción y viceversa.

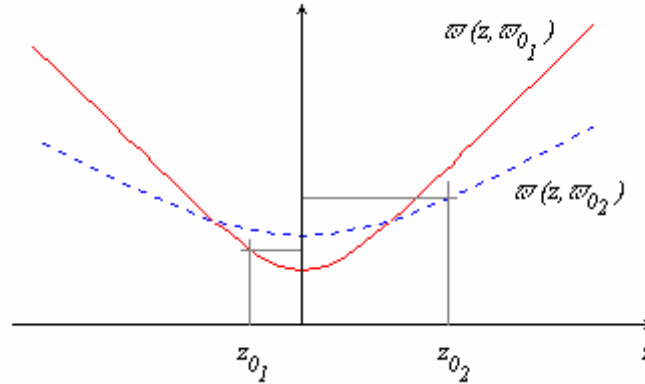


Figura 2.3 Dos funciones de ancho de haz para diferentes valores de ϖ_0 , señalando además las también profundidades de haz correspondientes.

Este mismo fenómeno, en campo lejano, lo podemos compensar variando convenientemente la frecuencia, ya que para $z \gg z_0$, podemos despreciar el primer término de la ecuación 2.52, frente al segundo, llegando a obtener una función lineal, de la forma:

$$\varpi(z) \approx \frac{2}{k \varpi_0} z = \frac{\varpi_0}{z_0} z, \quad (2.64)$$

y en estas condiciones, fijada la frecuencia o ϖ_0 , podemos modificar el otro parámetro, para obtener un valor de pendiente idéntico.

Esta característica lineal en campo lejano, nos permite medir la divergencia del haz en función de un ángulo, que lo obtendremos a partir de la pendiente,

$$m = \frac{\varpi_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi \varpi_0} \quad (2.65)$$

y utilizando trigonometría, obtenemos finalmente,

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{\lambda}{\pi \varpi_0} \right) \quad (2.66)$$

donde θ_0 será el ángulo que me define la caída de los campos en un factor $1/e$, o lo que es lo mismo, los límites del cono que contiene aproximadamente el 86 % de la potencia que transporta el haz.

Resumiendo, una disminución de la frecuencia, o lo que es lo mismo, un incremento de la longitud de onda, comporta un aumento de la divergencia, que también podemos conseguir disminuyendo el valor de la cintura del haz.

Fase del modo gaussiano fundamental

Otra característica no menos importante de los haces gaussianos es la forma de los diferentes frentes de fase de estos haces. Será esta la característica que nos indicará la manera de diseñar los posibles componentes de una línea cuasi-óptica, conduciendo la energía mediante reflexiones sucesivas, que intentan reproducir los frentes de fase de la cintura o “beam waist”, con tal de poder controlar la divergencia de haz a lo largo de la línea³.

La fase de un haz gaussiano fundamental la extraemos de la ecuación 2.50, teniendo en cuenta también el término e^{-jkz} de la ecuación 2.33, así finalmente tendremos una fase de la forma:

$$\arg(\Psi_0^0) = kz - \Theta + \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (2.67)$$

siendo,

$$\begin{aligned} \Theta &= \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) \\ R(z) &= z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde z_0 es la conocida profundidad de haz (2.53).

³Esto se estudiará con mucho más detalle en el capítulo 4 de esta tesis.

Como lo que pretendemos es obtener las superficies de fase constante, frentes de fase, igualaremos la ecuación 2.67 a una constante $2\pi q$, obteniendo una expresión de la forma:

$$2\pi q = kz - \Theta + \frac{kr^2}{2R(z)} \quad (2.69)$$

donde se ha introducido una nueva variable q . Esta ecuación nos define las superficies tridimensionales (pese a que sólo aparecen las variables r y z , debido a la simetría de revolución con respecto a la variable φ), con una fase de valor $2\pi q$.

Reconsideraciones sobre la existencia de las soluciones. ¿Paraxialidad?

Estudiando la ecuación 2.69, que define los frentes de fase, podemos llegar a conclusiones muy interesantes que pueden llegar a hacer pensar acerca de la validez de las soluciones empleadas. Si de esta ecuación despejamos r^2 , obtendremos:

$$r^2 = \frac{2R(z)}{k} \left[2\pi q + \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) - kz \right]. \quad (2.70)$$

Para calcular el valor del radio, deberemos resolver una raíz cuadrada, por lo que para obtener un valor real para r , se tiene que cumplir:

$$\frac{2R(z)}{k} \left[2\pi q + \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) - kz \right] > 0. \quad (2.71)$$

Si observamos la función $R(z)$, figura 2.4, observaremos que:

$$\begin{aligned} z > 0 &\Rightarrow R(z) > 0 \\ z < 0 &\Rightarrow R(z) < 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

ya que la función $R(z)$, es una función impar ($R(z) = -R(-z)$).

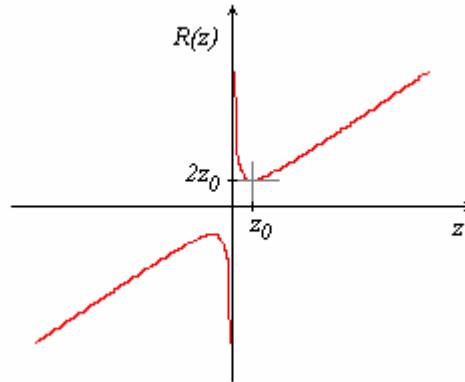


Figura 2.4 Radio de curvatura $R(z)$ de los frentes de fase de un haz gaussiano.

Teniendo en cuenta esta propiedad de la función $R(z)$, podemos desdoblar la condición 2.71, en dos nuevas condiciones,

$$\begin{aligned} \left[2\pi q + \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) - kz \right] &\geq 0 \quad \text{para } z \geq 0 \\ \left[2\pi q + \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) - kz \right] &< 0 \quad \text{para } z < 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

y despejando q en cada caso, tenemos finalmente:

$$\begin{aligned} q &\geq \frac{kz - \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)}{2\pi} \quad \text{para } z \geq 0 \\ q &< \frac{kz - \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)}{2\pi} \quad \text{para } z < 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Tanto la función kz como la función tangente, son funciones con simetría impar, por lo que bastará con imponer una de estas condiciones para que automáticamente se cumpla la otra. Para buscar los intervalos en los que no cumplimos la condición anterior, bastará con buscar en que zonas la función arcotangente es mayor que la función kz , es decir,

$$kz - \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad kz < \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (2.75)$$

siendo los intervalos que cumplen la condición los complementarios a estos. Para buscar los límites de estos intervalos, deberemos buscar los puntos de intersección de estas dos funciones para diferentes valores de los parámetros involucrados, como son la frecuencia y el tamaño de la cintura del haz.

En el punto $z = 0$, tenemos un cruce de las dos funciones, sin necesidad de imponer ninguna condición especial sobre los parámetros, pero este caso ya está contemplado dentro de las condiciones 2.73 y 2.74 y no supone ninguna frontera entre cumplir o no las condiciones anteriores. Deberemos intentar buscar algún otro punto de corte.

En principio, ambas funciones son siempre crecientes en la dirección de positiva del eje z . Por otro lado, la función arcotangente, tiene su pendiente máxima en $z = 0$, con un valor de $1/z_0$. Combinando estos dos razonamientos, si aseguramos que el valor de k , pendiente de la función lineal, esté por debajo de este valor,

$$k > \frac{1}{z_0} \quad (2.76)$$

no tendremos más cortes que el ya conocido en $z = 0$. Desarrollando esta ecuación, podemos llegar a,

$$\varpi_0 > \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi}. \quad (2.77)$$

Esto nos está indicando una limitación sobre el valor de cintura de haz, ϖ_0 , en relación a la longitud de onda (λ). Si volvemos a escribir la ecuación 2.77, para tener la condición expresada sobre el producto $k\varpi_0$, utilizado anteriormente en las consideraciones hechas sobre la paraxialidad, tenemos,

$$k\varpi_0 > \sqrt{2}. \quad (2.78)$$

En este caso, no estamos delimitando la necesidad de una corrección o no debido a la suposición de paraxialidad, sino que estamos limitando la existencia del haz gaussiano como solución de un espacio libre sin fuentes, ya que el no cumplir la condición 2.77 o 2.78, nos lleva a unos valores de q negativos en un intervalo, en el que se supone que la onda está propagándose en el sentido positivo del eje z , siendo la fase negativa indicativa de propagarse en sentido contrario. Esto es una consecuencia directa de la suposición paraxial, ya que para el caso de no cumplir la condición 2.78, la importancia de los términos despreciados es tal que no nos permite definir correctamente el modo de haz, solución exacta de la ecuación de Helmholtz en un espacio sin fuentes. La condición 2.78, nos da el límite real de aplicación de la suposición paraxial, que no contradice al dado en el apartado anterior ($k\varpi_0 \gg 6$) (2.49), ya que este delimita el intervalo en el que la solución paraxial se parece de una manera aceptable a la solución exacta.

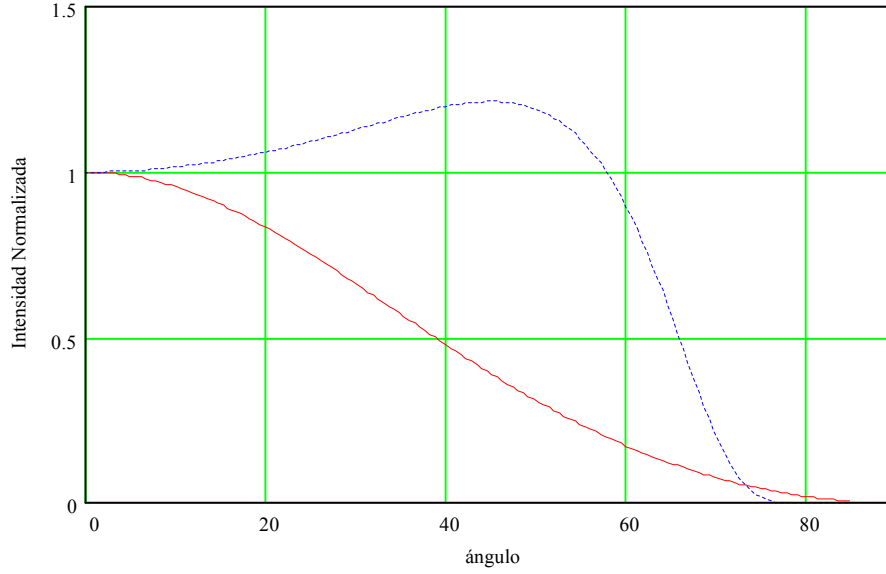


Figura 2.5 Evolución de la intensidad de campo normalizada, para el caso particular de $k\varpi_0 = 1$. En línea continua tenemos representada la solución exacta (2.46), y el línea discontinua la aproximación paraxial (2.48).

En la figura 2.5, podemos ver que la solución paraxial para un caso que no cumple la condición 2.78, no concuerda en absoluto con la solución real⁴. Al ir disminuyendo el producto $k\varpi_0$, empieza a aparecer un efecto de sobreoscilación, típico de los sistemas lineales, que probablemente debería ser compensado con los términos despreciados al hacer la suposición paraxial.

En resumen, podríamos decir que para $k\varpi_0 > 6$, los efectos de los términos de orden superior despreciados son realmente despreciables, para el intervalo $6 > k\varpi_0 > \sqrt{2}$, los efectos son cada vez más importantes, hasta llegar a valores $k\varpi_0 < \sqrt{2}$, en los que es imposible una representación del haz sin tener en cuenta estos términos. A la hora de diseñar cualquier línea de transmisión, para un modo determinado, deberíamos ver el valor del producto $k\varpi_0$ que tenemos, y probablemente corregir los valores de la cintura de haz, hasta llegar a valores que entren dentro de la condición de paraxialidad (2.49).

Formas de los frentes de fase.

Volviendo al tema de los frentes de fase, si suponemos que estamos trabajando con unos valores adecuados de frecuencia y cintura del haz, para los valores positivos de

⁴En la figura 2.1, están representados los casos para valores de $k\varpi_0$ de 3, 4, 6 y 10. Cuando el producto $k\varpi_0$ aumenta lo suficiente, cumple la condición 2.49, las soluciones se parecen bastante.

z , tendremos valores positivos de q , y viceversa, con lo que finalmente la ecuación 2.70, será una función par, teniendo en cuenta que deberemos componer las dos soluciones de la raíz cuadrada, para obtener finalmente la superficie entera. Esta conclusión resulta muy lógica, ya que en principio el haz gaussiano debe de estar centrado en $z = 0$, y definido para cualquier valor de z .

Después de estas puntualizaciones, podemos finalmente, comenzar con el estudio propio de la forma de estas superficies de fase constante. Tenemos que recordar que no tenemos ninguna dependencia con la variable φ , por lo que resolviendo las formas de estas superficies en el plano rz , basta con revolucionar esta solución para obtener la representación en tres dimensiones del frente de fase en cuestión.

La manera de diferenciar una superficie en concreto será mediante la variable auxiliar q , por lo que la consideraremos como una constante.

Cuando $z \rightarrow 0$, la única función con valores significativos es $R(z)$, por lo que deberemos esperar para valores pequeños de z , un comportamiento asintótico al infinito, definiendo un frente de fase plano.

Cuando $z \rightarrow \infty$, podremos aproximar las funciones:

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \approx z \quad (2.79)$$

$$\tan^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) \approx \frac{\pi}{2} \quad (2.80)$$

con lo que la ecuación 2.70, nos quedará,

$$r^2 = 2\lambda \left(q + \frac{1}{4} \right) z - 2z^2 \quad (2.81)$$

que si la desarrollamos, podemos llegar a la expresión de una elipse, con el diámetro menor de valor $2 \cdot z_c$, y el mayor $2\sqrt{2} \cdot z_c$, que se cruzan en el punto $(r, z) = (0, z_c)$,

$$\left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right)^2 + (z - z_c)^2 = z_c^2 \quad (2.82)$$

donde z_c ,

$$z_c = \frac{\lambda \left(q + \frac{1}{4} \right)}{2}. \quad (2.83)$$

Lógicamente esta ecuación está definiendo el comportamiento en valores grandes de z , por lo que no deberemos coger como superficie válida toda la superficie de la esfera, sino únicamente el casquete mas alejado.

En la figura 2.6, tenemos representadas las aproximaciones anteriores, junto con una representación de la forma real de los frentes de fase, pudiéndonos hacer una idea de la validez de la aproximaciones realizadas.

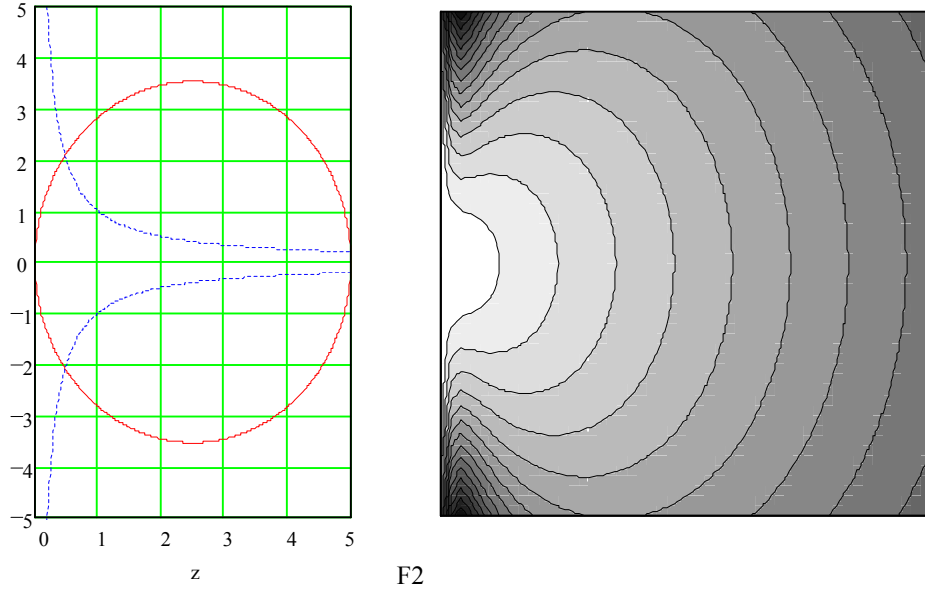


Figura 2.6 Representación de las formas teóricas (izquierda) y reales (derecha) de los frentes de fase de un haz gaussiano fundamental.

Para terminar, miremos el punto $z = z_0$, por tratarse de un punto con cierta peculiaridad, ya que la función $R(z)$ tiene un mínimo. En este punto en concreto, tenemos:

$$R(z_0) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right) \Bigg|_{z=z_0} = z_0 (1 + 1) = 2z_0 \quad (2.84)$$

$$\tan^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) \Bigg|_{z=z_0} = \frac{\pi}{4}$$

para conocer el valor de q correspondiente a este valor de distancia, calcularemos el valor de la fase sobre el eje, $r = 0$, de tal manera que la ecuación 2.70, para este caso y despejando q , obtenemos,

$$q = \frac{z_0}{\lambda} - \frac{1}{8} \quad (2.85)$$

que sustituido de nuevo en la ecuación general de los frentes de fase (2.70), obtenemos:

$$r^2 = \frac{4z_0}{k} \left[kz_0 - \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) - kz \right]. \quad (2.86)$$

Este es el punto en el que la función del radio de curvatura tiene un mínimo, por lo que la curvatura de los frentes es máxima.

2.2.2.- Modos de orden superior: Funciones de Gauss-Hermite.

Los modos de orden superior, conviene que los estudiemos por separado, ya que los modos son diferentes al cambiar las funciones de representación elegidas. Empezaremos por los modos definidos por las funciones de Gauss-Hermite (2.17), utilizando la simplificación de tomar modos no-astigmáticos (2.21),

$$u_{mn}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi m! n!}} \cdot \frac{1}{w} \cdot \left\{ H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{w} \right) \cdot H_n \left(\sqrt{2} \frac{y}{w} \right) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2}} \right\} \quad (2.87)$$

$$\cdot \left\{ e^{-jk \frac{x^2+y^2}{2R}} \right\} \cdot \left\{ e^{j(m+n+1)\Theta} \right\}$$

donde tenemos definidas las funciones H_m y H_n , de la siguiente manera [Abramowitz, 64]:

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^m \frac{1}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} \quad (2.88)$$

donde el límite superior del sumatorio, es el número entero inferior, más cercano al valor $n/2$, siendo los primeros polinomios de la forma:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \end{aligned} \quad (2.89)$$

donde se puede apreciar que el orden de estos polinomios es el mismo que el de la función de Hermite correspondiente.

Para empezar un estudio mínimamente riguroso de la ecuación 2.87, no tenemos más remedio que volver a separar el estudio entre los términos del conformadores del módulo, y los conformadores de la fase.

Módulo de modos Gauss-Hermite de orden superior

Los términos del módulo de la ecuación 2.87, son:

$$|u_{mn}(x, y, z)| = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi m! n!}} \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \left\{ H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{\varpi}\right) \cdot H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{\varpi}\right) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{\varpi^2}} \right\} \quad (2.90)$$

donde podemos diferenciar claramente los términos de normalización, las funciones de Hermite, y finalmente la exponencial gaussiana.

Para poder averiguar las formas de estos modos gaussianos, en primer lugar, utilizaremos los cambios,

$$\bar{x} = \frac{x}{\varpi} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{y}{\varpi}, \quad (2.91)$$

quedando ahora la expresión 2.90,

$$|u_{mn}(\bar{x}, \bar{y}, z)| = \frac{1}{\sqrt{2^{m+n-1} \pi m! n!}} \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \left\{ H_m(\sqrt{2}\bar{x}) \cdot H_n(\sqrt{2}\bar{y}) \cdot e^{-\bar{x}^2} \cdot e^{-\bar{y}^2} \right\} \quad (2.92)$$

y viendo que tenemos también separados los términos dependientes de \bar{x} e \bar{y} , podemos fijar un índice cualquiera a cero, con lo que simplificamos más si cabe la ecuación anterior. Si por ejemplo, fijamos $n = 0$, y buscamos la expresión sobre el eje \bar{x} , haciendo $\bar{y} = 0$, obtendremos:

$$|u_{m0}(\bar{x}, 0, z)| = \frac{1}{\sqrt{2^{m-1} \pi m!}} \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \left\{ H_m(\sqrt{2}\bar{x}) \cdot e^{-\bar{x}^2} \right\}. \quad (2.93)$$

Como únicamente queremos ver la forma que van a tener estos modos, debido a que son estructuras gaussianas, nos basta con conocer la forma en una posición concreta para poder expandir rápidamente el haz, por lo que también podemos fijar una posición. Para ponerlo fácil, elegiremos $z = 0$, cambiando la función $\varpi(z)$, que es la única dependiente de la posición, por el valor de la cintura, ϖ_0 . Con todas estas suposiciones y limitaciones, hemos llegado a una expresión simplificada, con la que podemos buscar las formas de los campos de los modos u_{m0} sobre el eje x , en la posición de la cintura del haz, $z = 0$, que tiene la forma:

$$|u_{m0}(\bar{x}, 0, 0)| = \frac{1}{\sqrt{2^{m-1} \pi m!}} \cdot \frac{1}{\varpi_0} \cdot \left\{ H_m(\sqrt{2}\bar{x}) \cdot e^{-\bar{x}^2} \right\}. \quad (2.94)$$

En esta ecuación, tenemos únicamente, una constante de normalización dependiente del modo, que escalará al resto de términos, que serán los que definirán la forma final de los modos. En la figura 2.7, tenemos representada la ecuación 2.94, para los primeros modos gaussianos, utilizando la normalización anterior, lo que significa que para $\bar{x} = 1$, tendremos en x el valor de ϖ_0 , con lo que podemos hacernos una idea, de la expansión de la potencia que supone el aumentar el orden de los modos.

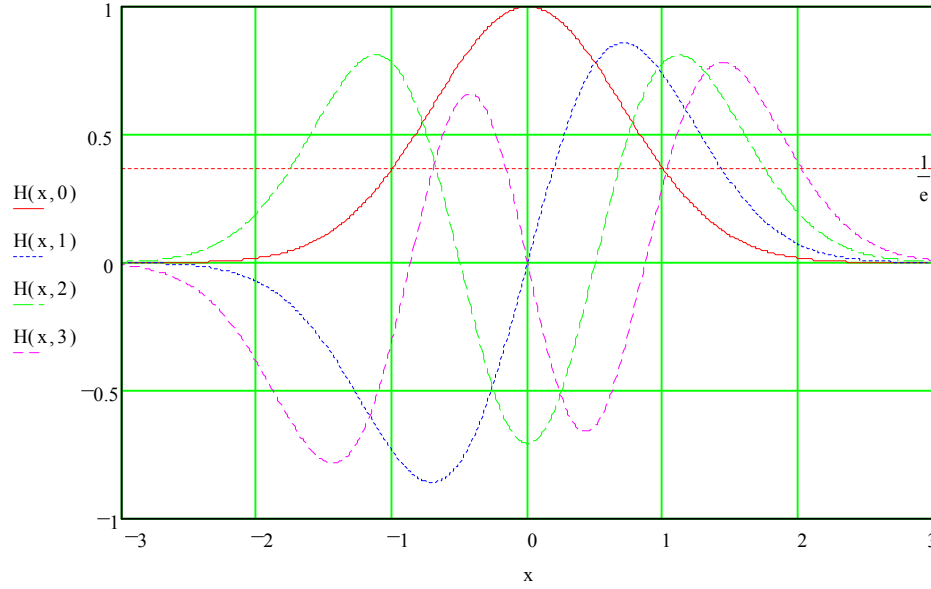


Figura 2.7 Representación de la ecuación 2.94, para los cuatro primeros modos de Gauss-Hermite, sobre el eje x , en $z = 0$. Siendo x la variable normalizada, y habiéndose cambiado la nomenclatura $u_{m0}(x,0,0)$ por $H(x,m)$.

A la vista de esta figura, podemos empezar a sopesar la posibilidad de definir unos valores de cintura nuevos para los modos de orden superior, ya que al aumentar el orden los modos se ensanchan. Si observamos la línea que indica la caída de $1/e$ del campo correspondiente al modo fundamental, y escogemos este criterio para definir los valores de cintura para los modos de orden superior, tendremos que los valores de cintura serán aproximadamente,

$$\varpi_m = \sqrt{m+1} \cdot \varpi_0 \quad (2.95)$$

que contendrán, aproximadamente el 95% de la potencia transportada en el eje x , que podemos calcular de la siguiente manera,

$$\frac{\int_0^{\varpi_m} |u_{m0}(x,0,0)|^2 dx}{\int_0^\infty |u_{m0}(x,0,0)|^2 dx} \quad (2.96)$$

Para completar la información sobre las formas del módulo de las funciones de Gauss-Hermite, en la tabla 2.1 se presentan algunos valores significativos de los primeros modos.

	Posición de los ceros ⁵	Posición de los máximos	Valores de los máximos
n = 0	-	x = 0	y = 1
n = 1	x = 0	x = ±0.70710685	y = ± 0.85776
n = 2	x = ± 0.5	x = 0	y = - 0.707106
		x = ± 1.11803402	y = + 0.81036
n = 3	x = 0	x = ± 0.42575893	y = ∓ 0.65972
	x = ± 0.8660254	x = ± 1.43830814	y = ± 0.78268
n = 4	x = ± 0.37098189	x = 0	y = + 0.61237
	x = ± 1.16720711	x = ± 0.75986583	y = - 0.6329
		x = ± 1.70956222	y = + 0.7634
n = 5	x = 0	x = ± 0.33676032	y = ± 0.58567
	x = ± 0.67781309	x = ± 1.04315289	y = ∓ 0.61463
	x = ± 1.42848717	x = ± 1.94895583	y = ± 0.74873

Tabla 2.1 Valores significativos de la funciones de Gauss-Hermite.

La cintura de los modos superiores, ϖ_m , la definimos cuando los campos, en su parte más externa, cruzan la línea que marca la caída de los campos del modo fundamental en un factor $1/e$, como aparece en la figura 2.7. Si normalizamos los máximos de las funciones que definen los modos superiores al máximo del modo fundamental, el nivel que estará marcando ϖ_m , vendrá fijado por la relación,

$$\frac{e^{-1}}{\max(n)} \quad (2.97)$$

siendo la función $\max(n)$, la que me da el valor del máximo de cada modo, y que se puede aproximar por los siguientes polinomios, en el caso de $n \leq 12$,

$$\begin{aligned} \max(n) = & 0.99989692 \\ & -0.16475253 \cdot n \\ & +0.04739390 \cdot n^2 \\ & -0.00708866 \cdot n^3 \\ & +5.10583716 \cdot 10^{-4} \cdot n^4 \\ & -1.40338199 \cdot 10^{-5} \cdot n^5 \end{aligned} \quad (2.98)$$

y en el caso de $12 < n < 40$,

⁵Damos por supuestos los ceros asintóticos en el infinito.

$$\begin{aligned}
\max(n) &= 0.80811006 \\
&-0.01669531 \cdot n \\
&+8.82167574 \cdot 10^{-4} \cdot n^2 \\
&-2.96157360 \cdot 10^{-5} \cdot n^3 \\
&+5.45599921 \cdot 10^{-7} \cdot n^4 \\
&-4.20672781 \cdot 10^{-9} \cdot n^5
\end{aligned} \tag{2.99}$$

En la figura 2.8, tenemos representados los dos polinomios con los valores reales de los máximos, viendo la bondad de las aproximaciones realizadas.

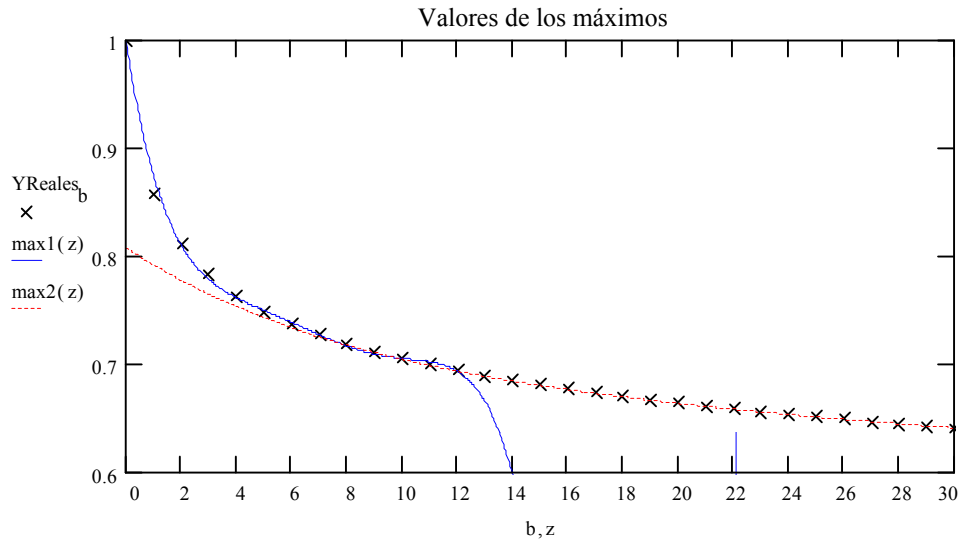


Figura 2.8 Valores exactos de los máximos (YReales), junto con los polinomios aproximadores (max1, correspondiente a ec. 2.98, y max2 a la ec. 2.99).

Se ha optado por una interpolación polinómica por tramos, ya que cualquier intento de un desarrollo matemático que permitiese obtener una fórmula analítica, resulta muy complicado. Necesitaríamos calcular la derivada de la función u_{m0} , lo que supone derivar la expresión 2.88, con un producto de los polinomios de Hermite y la función exponencial gaussiana, posteriormente calcular la raíz mayor del polinomio resultante, y buscar el valor del máximo absoluto.

Ahora ya tenemos totalmente definidos y controlados los campos sobre un eje, por lo que ya es el momento de deshacer todas las suposiciones que hemos hecho. En primer lugar, si en vez de escoger $n = 0$, escogemos $m = 0$, y buscamos los campos sobre el eje y , obtendremos exactamente los mismos resultados, ya que las fórmulas resultantes son idénticas.

Conociendo los campos sobre los dos ejes, para calcular los campos, por ejemplo para cualquier valor de y , deberemos coger la forma de variación para $y = 0$, sobre el eje x , y modularla con el valor correspondiente al punto y de la distribución sobre el eje y .

De esta manera podemos obtener las distribuciones de campo para este tipo de modos en el plano xy , $z = 0$. En la figura 2.9, se presentan las distribuciones de campo en un plano de z constante de los primeros modos gaussianos, utilizando las funciones de Gauss-Hermite.

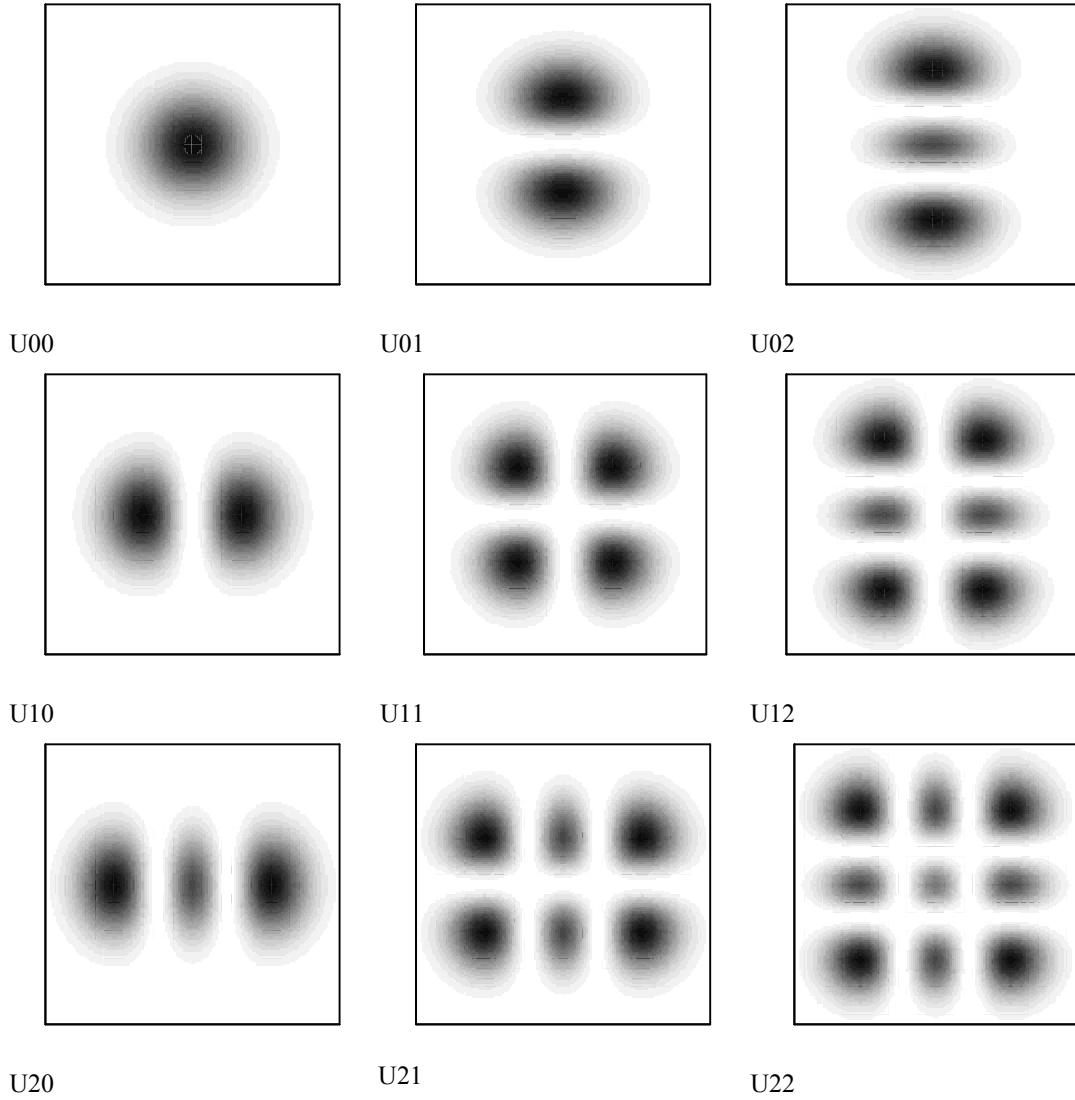


Figura 2.9 Distribuciones de campo de los primeros modos de Gauss-Hermite.

Conociendo la distribución de campos en un plano de z constante, la dependencia con la variable z , es del mismo tipo que en el caso del modo fundamental, se va expandiendo en la dirección de los ejes x e y ,

$$\begin{aligned}
 \varpi_x(z) &= \varpi_{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{k\varpi_0^2} \right)^2} \\
 \varpi_y(z) &= \varpi_{y_0} \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{k\varpi_0^2} \right)^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.100}$$

pudiendo introducir en las nuevas variables ϖ_{x0} y ϖ_{y0} , los valores de cintura correspondientes a los puntos en $z = 0$, que queramos seguir su expansión. Si elegimos los valores ϖ_m y ϖ_n , definidos según la ecuación 2.95, podremos definir el tetraedro que contiene el 91.2 % de la potencia total que transporta el haz, independientemente de los valores de los índices m y n .

Fase de los modos de Gauss-Hermite de orden superior

En cuanto a la fase, las formas de los frentes son básicamente iguales que en el caso fundamental, ya que en la ecuación únicamente hay un término que dependa del modo,

$$e^{j(m+n+1)\Theta} \quad (2.101)$$

que corresponde al término que me define el desfase sobre el eje de propagación del modo mn -ésimo con respecto a la fase de una onda plana ($kz - \omega t$).

También debido a la presencia de este término, tenemos diferentes condiciones de existencia de los modos, que serán diferentes para cada modo.

Haciendo exactamente el mismo desarrollo, que el utilizado anteriormente para encontrar la condición de existencia en el caso del modo fundamental, podemos llegar a una nueva versión de la condición 2.77 ampliada para el resto de modos, que tiene la forma siguiente:

$$\varpi_0 > \sqrt{m+n+1} \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2.102)$$

que si lo ponemos en función del producto $k\varpi_0$, tenemos,

$$k\varpi_0 > \sqrt{2} \cdot \sqrt{m+n+1}. \quad (2.103)$$

Si particularizamos esta ecuación para el caso fundamental, tenemos exactamente la condición 2.78.

Al aumentar el orden del modo, la restricción es mayor, cosa bastante lógica, ya que la misma estructura del modo es más ancha, por lo que podemos pensar que la suposición de paraxialidad es cada vez menos cierta.

Reconsideraciones sobre el criterio de paraxialidad para las soluciones basadas en las funciones de Gauss-Hermite

En el caso del modo fundamental, habíamos fijado la condición de paraxialidad como que el producto $k\varpi_0$ debería ser mayor que 6 (2.49), y habíamos dicho que esta condición se modifica para los modos de orden superior en la misma medida que estos se ensanchan.

Vamos a hacer un pequeño estudio sobre la condición de paraxialidad de los modos superiores. Podemos hacernos con las expresiones de campo lejano de los modos que estamos utilizando, y también conocemos las expresiones exactas de las soluciones en campo lejano.

Las expresiones exactas, no son más que una ampliación de la ecuación 2. 46, en la que incluimos los polinomios de Hermite, teniendo en cuenta que el argumento del polinomio es el mismo que el de la exponencial, así finalmente obtenemos,

$$\frac{S_F(\theta)}{S_F(0)} = \cos^2 \theta \cdot e^{\frac{-2\sin^2 \theta}{\left(\frac{2}{k\varpi_0}\right)^2}} \cdot H_m \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sin \theta}{\left(\frac{2}{k\varpi_0}\right)} \right)^2. \quad (2.104)$$

Las fórmulas aproximadas, con la misma filosofía que las fórmulas exactas, son la ampliación de la fórmula 2.48 incluyendo los polinomios de Hermite, cuyo argumento sigue siendo el mismo que el de la exponencial, quedando en este caso,

$$\frac{S_F(\theta)}{S_F(0)} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot e^{\frac{-2\tan^2 \theta}{\left(\frac{2}{k\varpi_0}\right)^2}} \cdot H_m \left(\frac{\sqrt{2} \cdot \tan \theta}{\left(\frac{2}{k\varpi_0}\right)} \right)^2. \quad (2.105)$$

Esta representación del campo lejano, corresponde únicamente con un plano, ya sea $x = 0$ o $y = 0$. Para obtener el campo lejano total, deberemos componer adecuadamente ambas soluciones. En cuanto a establecer un criterio de paraxialidad, estos dos planos serán los más críticos, ya que serán en donde los campos tengan una distribución más amplia, mayor peligro en cuanto a la paraxialidad se refiere.

Las condiciones de paraxialidad, en buena lógica, deberán ser más restrictivas al ir aumentando el orden de los modos, de la misma manera que ocurre con las condiciones de existencia de los modos (2.103).

El método visual empleado por D.H.Martin y J.W.Bowen en la referencia [Martin, 93], resulta totalmente subjetivo, ya que no cuantifica el parecido de las expresiones exacta y paraxial. Nosotros, para poder evaluar, con cierto criterio, si podemos o no despreciar el error cometido al hacer la suposición paraxial, definiremos un error,

$$\varepsilon = \frac{\int |f_1(\theta) - f_2(\theta)| d\theta}{\int f_1(\theta) d\theta} \quad (2.106)$$

siendo $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$ las funciones que pretendemos comparar, ecuaciones 2.104 y 2.105. Será en base a este error, entre las funciones exacta (2.104) y paraxial (2.105), como podremos evaluar las nuevas condiciones de paraxialidad para los modos de orden superior.

Así, mediante la fórmula 2.106, somos capaces de evaluar el error cometido, por ejemplo, en el caso fundamental, cuando estamos en el límite de la condición $k\varpi_0 \gg 6$. En la tabla 2.2, tenemos los diferentes errores para una serie de valores de $k\varpi_0$, podemos observar que el error cometido disminuye como era de esperar, y que cuando estamos cerca del límite de la condición, el error se acerca al 3 %.

$k\varpi_0$	ε (%)
6	3.0320842
7	2.2307725
8	1.7204176
9	1.3515756
10	1.1154252

Tabla 2.2 Valores del error cometido por la aproximación paraxial para diferentes valores de $k\varpi_0$, para el caso del modo fundamental.

En la figura 2.10, tenemos representado el error paraxial que cometemos para los primeros modos gaussianos. En ella podemos ver que para tener un error del 3% con un modo de Gauss-Hermite de primer orden tenemos que llegar hasta valores de $k\varpi_0$ de aproximadamente 12, para el de segundo orden hasta 18, y el de tercer orden hasta 23. Esto nos puede fijar una condición de limitación de la aproximación paraxial con un error menor del 3 %, que tiene la forma:

$$k\varpi_0 \gg 6 \cdot (n+1) \quad (2.107)$$

siendo n , uno de los índices de los modos de Gauss-Hermite⁶.

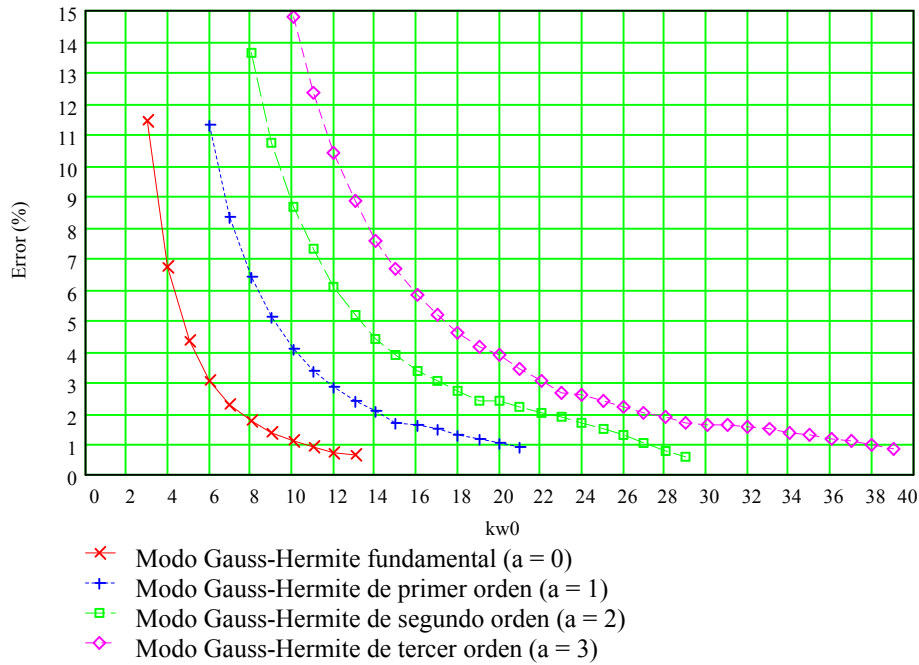


Figura 2.10 Error de la aproximación paraxial de los primeros modos, en función del valor del producto $k\varpi_0$.

Vale la pena recordar, que los errores mostrados, han sido calculados con las fórmulas del campo lejano sobre un plano concreto ($y = 0$), por lo que estos no son los errores totales generados como fruto de la aproximación paraxial, pero son bastante indicativos. Está claro, que si en un plano el error es grande, será aún mayor al considerar toda la superficie, y si en un plano se mantiene dentro de unos márgenes aceptables, es lógico pensar que los errores al expandir los resultados no serán demasiado grandes y estarán limitados.

En la figura 2.11, tenemos representado el perfil de potencia de los primeros modos gaussianos, para los casos límites definidos utilizando la condición 2.107 ($k\varpi_0=6$ para el modo fundamental y $k\varpi_0=12, 18$ y 24 para los siguientes modos). Podemos observar el parecido de las soluciones exactas y aproximadas, para los valores del producto $k\varpi_0$ utilizados en cada caso.

⁶La condición será más restrictiva para el índice mayor del modo, por lo que cuando queramos ver si un modo con índices m y n cumple o no la condición, bastará con mirar si la cumple el índice mayor.

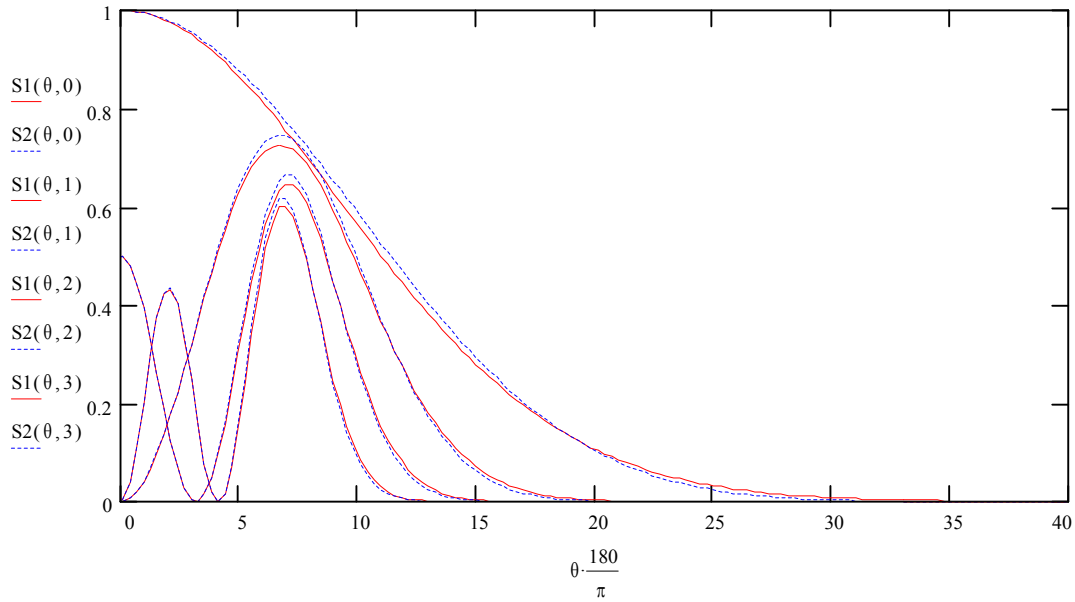


Figura 2.11 Potencia normalizada en campo lejano de los primeros modos gaussianos. En línea continua las soluciones exactas, S1 (2.104) y en línea discontinua las aproximaciones paraxiales, S2 (2.105).

Con esto, concluimos el estudio para el caso de las funciones de Gauss-Hermite, que como hemos visto, tienen una aplicación directa cuando trabajemos con un sistema de coordenadas rectangulares. Hemos realizado el estudio para modos no-astigmáticos, la ampliación a modos astigmáticos se puede entender, como un ensanchamiento diferente para cada dirección x e y , caracterizado por unos valores de cintura w_0 diferentes en una dirección y en otra. Esto, lógicamente lleva a que tenemos diferentes de radios de curvatura en una dirección y en otra, y diferente forma de evolución de la fase. Una vez visto el desarrollo para modos no-astigmáticos, podemos llegar a imaginarnos la forma final de los modos con este tipo de deformación, componiendo los planos que nos son conocidos, $y = 0$ y $x = 0$, e interpolando el comportamiento en cada uno de los cuadrantes. Parece lógico pensar, que la solución deberá seguir siendo una estructura con cambios no muy bruscos, por lo que las aproximaciones que podamos hacer, tendrán bastante parecido con las distribuciones finales de los campos para estos modos.

Este último comentario, va muy ligado a la razón de este capítulo, la de estudiar a fondo los modos gaussianos, para poder modelar componentes que a partir de modos de guía sean capaces de generar estos modos. Si tenemos guías rectangulares, para trabajar de una manera más afín a la estructura, deberemos utilizar los modos astigmáticos, para obtener una representación más simple de los campos, mientras que si

trabajamos con guías de onda cuadradas, los modos más afines serán los no-astigmáticos.

2.2.3.- Modos de orden superior: Funciones de Gauss-Laguerre.

A continuación se presenta la familia de soluciones basadas en las funciones Gauss-Laguerre, que nos resultarán de mucha utilidad cuando trabajemos en coordenadas cilíndricas.

La forma de las soluciones normalizadas $u_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z)$, utilizando las funciones de Gauss-Laguerre [Wencker, 69], ha sido presentada anteriormente (2.34), pero para no dispersarnos la volveremos a recordar aquí:

$$u_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} \Gamma(b+1) \cdot \binom{a+b}{a}}} \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \cos(b\varphi - \varphi_0) \cdot \left(\frac{r\sqrt{2}}{\varpi} \right)^b \cdot L_a^{(b)}\left(\frac{2r^2}{\varpi^2}\right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\varpi^2}} \cdot e^{-j\frac{k}{2R}r^2} \cdot e^{j(b+2a+1)\Theta} \quad (2.108)$$

donde, $\varpi(z)$, $R(z)$ y $\Theta(z)$, están definidos según las ecuaciones 2.36, 2.37 y 2.38 respectivamente, y $L_a^{(b)}$ son los polinomios de Laguerre generalizados, que se obtienen a través de la fórmula:

$$L_a^{(b)}(x) = \sum_{m=0}^a (-1)^m \binom{a+b}{a-m} \frac{1}{m!} x^m. \quad (2.109)$$

Así, en el caso del modo fundamental, $a = b = 0$, $L_0^{(0)}(x) = 1$, obtenemos la misma formula que para el caso fundamental de las funciones de Gauss-Hermite, como ya hemos podido comprobar. Los polinomios de Laguerre para los primeros modos los podemos obtener a partir de la ecuación anterior, y tienen la forma:

$$\begin{aligned} L_0^{(0)}(x) &= 1 & L_0^{(1)}(x) &= 1 \\ L_1^{(0)}(x) &= 1 - x & L_1^{(1)}(x) &= 2 - x \\ L_2^{(0)}(x) &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2} & L_2^{(1)}(x) &= 3 - 3x + \frac{x^2}{2} \\ L_0^{(2)}(x) &= 1 & & \\ L_1^{(2)}(x) &= 3 - x & & \\ L_2^{(2)}(x) &= 6 - 4x + \frac{x^2}{2} & & \end{aligned} \quad (2.110)$$

Podemos observar que en este caso, los polinomios están gobernados directamente por los dos índices a y b , y no sucede como en el caso anterior, que podíamos simplificar los desarrollos anulando uno de los índices. También podemos ver que el grado del polinomio, lo marca el índice a .

Para simplificar la expresión 2.108, y poder trabajar más fácilmente, definiremos una nueva familia de polinomios,

$$P_a^b(x) = (\sqrt{2}x)^b \cdot L_a^{(b)}(2x^2) \quad (2.111)$$

teniendo en cuenta estos nuevos polinomios, podemos volver a escribir la ecuación 108,

$$u_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z) = C \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \cos(b\varphi - \varphi_0) \cdot P_a^b\left(\frac{r}{\varpi}\right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\varpi^2}} \cdot e^{-j\frac{k}{2R}r^2} \cdot e^{j(b+2a+1)\Theta} \quad (2.112)$$

donde podemos observar claramente, los términos del módulo, con la exponencial gaussiana modulada por los nuevos polinomios y por el coseno, y los términos de fase muy parecidos a las fórmulas de Gauss-Hermite. También hemos incluido la constante C , definida:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} \Gamma(1+b) \binom{a+b}{a}}} \quad (2.113)$$

para intentar simplificar al máximo, y dar a entender que simplemente es una constante de normalización.

Al igual que en los casos anteriores vamos a realizar el análisis separando los términos del módulo y de la fase.

Módulo de los modos de Gauss-Laguerre de orden superior.

La expresión del módulo es la siguiente:

$$\|u_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z)\| = C \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \cos(b\varphi - \varphi_0) \cdot P_a^b\left(\frac{r}{\varpi}\right) \cdot e^{-\frac{r^2}{\varpi^2}} \quad (2.114)$$

podemos observar que la exponencial gaussiana está modulada por un coseno dependiente de φ , que está gobernado por el índice b , los nuevos polinomios, dependientes de las variables r y z , y gobernados por los dos índices, a y b , y una función dependiente de z , que se encargará de normalizar la potencia al ir propagando la solución en la dirección del eje z .

En las figuras 2.12, 2.13 y 2.14 están representados las formas de los campos de los primeros modos de Gauss-Laguerre. Esta representación está realizada, para un valor fijo de φ , que coincide con un valor tal, que la variación en el plano rz es máxima (para poder observar de una manera objetiva las formas de los campos, sin que el término del

coseno nos pueda molestar). Se ha utilizado también para la representación, la variable normalizada, x , que está definida como,

$$x = \frac{r}{\varpi(z)} = \frac{r}{\varpi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{k\varpi_0^2} \right)^2}} \quad (2.115)$$

con la que podemos simplificar la expresión 2.114, quedando de la forma:

$$\|u_a^{b,\varphi_0}(r, \varphi, z)\| = C \cdot \frac{1}{\varpi} \cdot \cos(b\varphi - \varphi_0) \cdot P_a^b(x) \cdot e^{-x^2}. \quad (2.116)$$

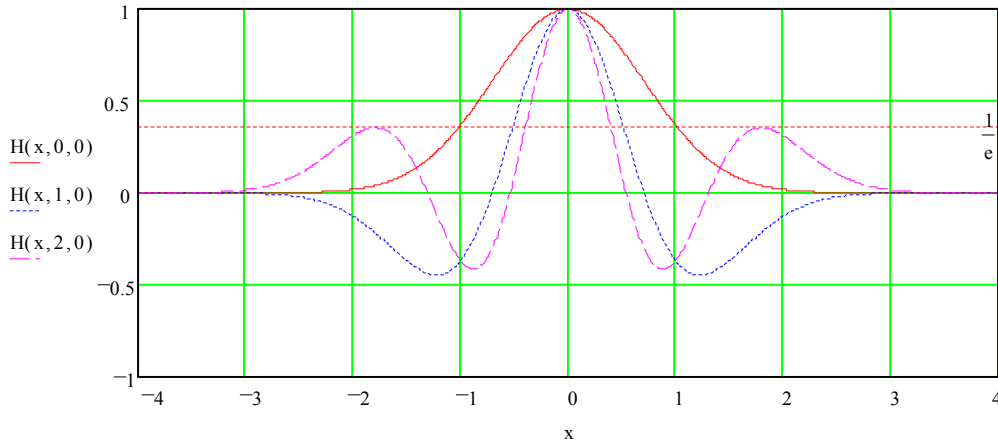


Figura 2.12 Representación de los términos de módulo del campo para los modos de Gauss-Laguerre con $b=0$. Nomenclatura: $H(x,a,b) \equiv u_a^{b,0}(x,0,0)$.

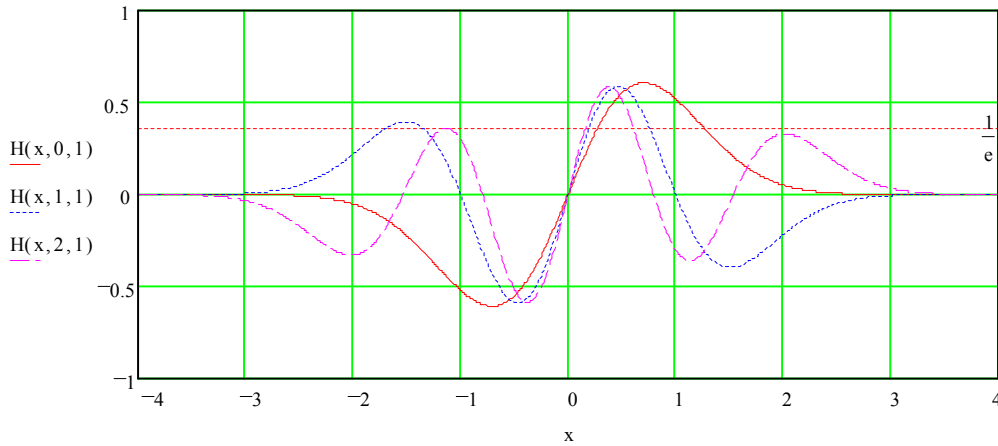


Figura 2.13 Representación de los términos de módulo del campo para los modos de Gauss-Laguerre con $b=1$. Nomenclatura: $H(x,a,b) \equiv u_a^{b,0}(x,0,0)$.

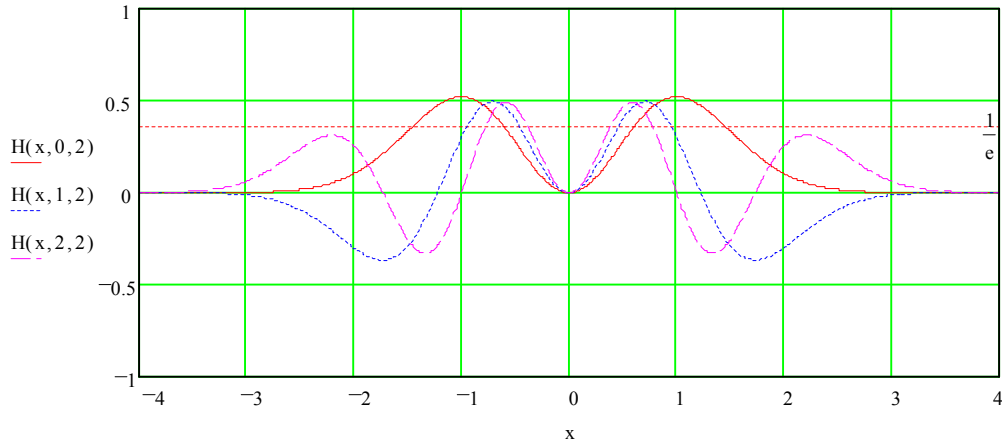


Figura 2.14 Representación de los términos de módulo del campo para los modos de Gauss-Laguerre con $b=2$. Nomenclatura: $H(x,a,b) \equiv u_a^{b,0}(x,0,0)$.

En este caso, hemos representado todos los modos normalizados respecto al fundamental, y hemos trazado la línea de caída de los campos en un factor $1/e$. Podemos fácilmente observar, que para este caso, a diferencia de las funciones de Gauss-Hermite, los máximos no se encuentran en la parte más externa de los modos. En la tabla 2.3, tenemos los valores más significativos de estos primeros modos gaussianos de Gauss-Laguerre.

		Posición ceros ⁷	Posición máximos	Valor máximos
b=0	a=0	-	$x = 0$	$y = +1$
	a=1	$x = \pm 0.707$	$x = 0$ $x = \pm 1.224$	$y = +1$ $y = -0.44626$
	a=2	$x = \pm 0.541$ $x = \pm 1.306$	$x = 0$ $x = \pm 0.880$ $x = \pm 1.7957$	$y = +1$ $y = -0.41406$ $y = +0.35388$
b=1	a=0	$x = 0.000$	$x = \pm 0.707$	$y = \pm 0.60653$
	a=1	$x = 0.000$ $x = \pm 1.000$	$x = \pm 0.468$ $x = \pm 1.510$	$y = \pm 0.58721$ $y = \mp 0.39538$
	a=2	$x = 0.000$ $x = \pm 0.796$ $x = \pm 1.538$	$x = \pm 0.378$ $x = \pm 1.133$ $x = \pm 2.017$	$y = \pm 0.58419$ $y = \mp 0.36041$ $y = \pm 0.32940$
b=2	a=0	$x^2 = 0.000$	$x = \pm 1.000$	$y = +0.52026$
	a=1	$x^2 = 0.000$ $x = \pm 1.224$	$x = \pm 0.707$ $x = \pm 1.732$	$y = +0.49523$ $y = -0.36586$
	a=2	$x^2 = 0.000$ $x = \pm 1.000$ $x = \pm 1.732$	$x = \pm 0.586$ $x = \pm 1.337$ $x = \pm 2.205$	$y = +0.49064$ $y = -0.32987$ $y = +0.31228$

Tabla 2.3 Valores significativos de los primeros modos de Gauss-Laguerre.

En la figura 2.15, están representadas los perfiles de la potencia de los primeros modos gaussianos de Gauss-Laguerre. Aquí podemos observar el comportamiento del término del coseno, al ir variando el índice azimutal b (para $b = 0$, tenemos simetría de revolución).

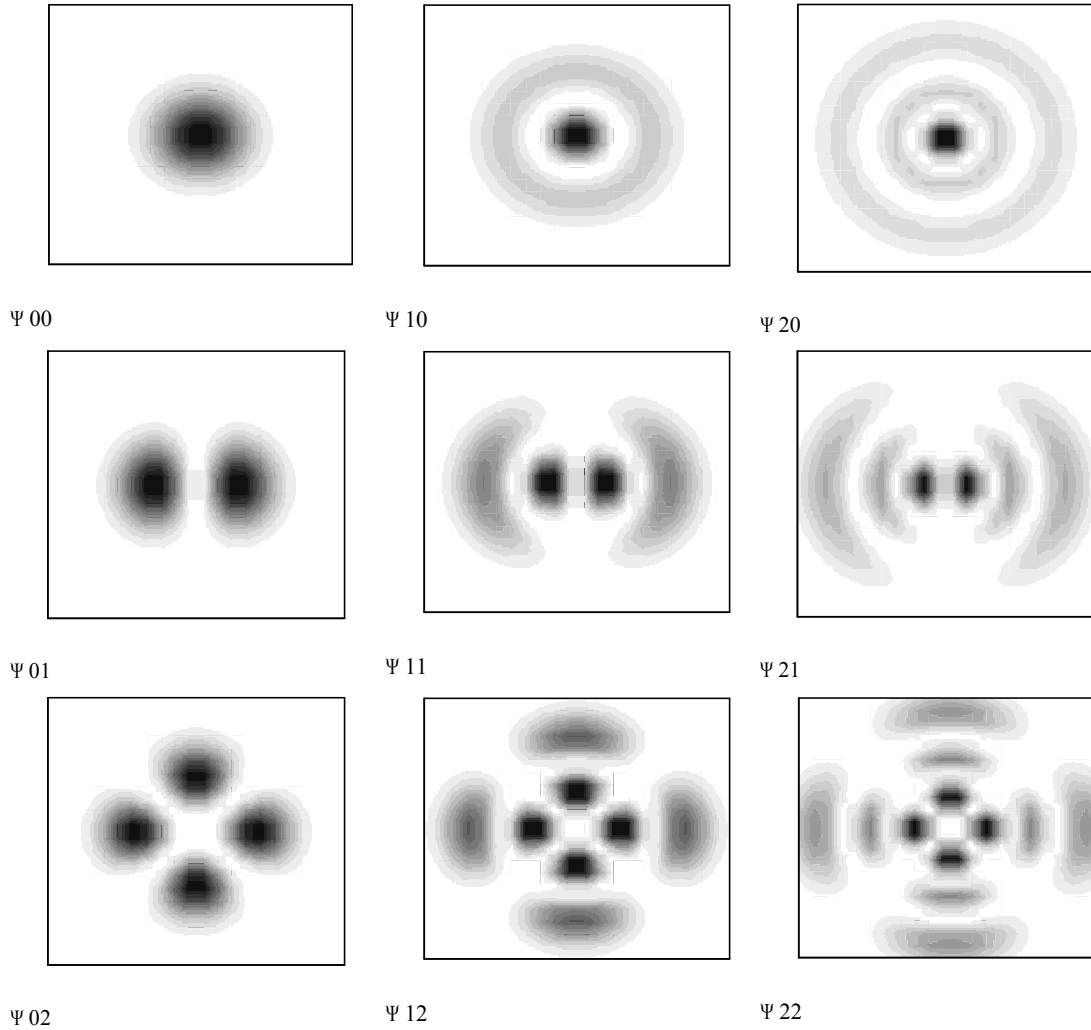


Figura 2.15: Formas del módulo de los primeros modos gaussianos de Gauss-Laguerre, la notación es Ψ_{ab} , siendo a el índice radial y b el azimutal.

Podemos observar también, que muy probablemente tengamos que volver a definir un criterio para establecer los valores de la cintura para los modos de orden superior. Como podemos observar, en todos los casos, el valor de los máximos decrece al aumentar la variable normalizada x . Si definimos los valores de la cintura de los modos de orden superior como:

$$\varpi_a^b = \sqrt{b+2a+1} \cdot \varpi_0 \quad (2.117)$$

⁷Damos por supuestos los ceros asintóticos en el infinito.

obtenemos que para todos los casos, la potencia encerrada por un círculo de radio ϖ_a^b , es mayor del 86 % de la potencia total transportada por el haz. En la tabla 2.4, tenemos los valores de potencia encerrada por los valores de cintura de haz definidos según la ecuación 2.117.

	b=0	b=1	b=2
a=0	86.46 %	90.84 %	93.80 %
a=1	90.82 %	92.18 %	93.67 %
a=2	92.27 %	93.01 %	93.80 %

Tabla 2.4 Potencia encerrada por un radio del valor de la cintura del haz definido según la ecuación 2.117, para los primeros modos de Gauss-Laguerre.

Estos valores de potencia, son teniendo en cuenta toda la distribución de campos de cada modo, y se obtienen, mediante la integral doble, en un plano de z constante, de la intensidad de campo contenida dentro de un círculo de radio ϖ_a^b , normalizada por la potencia total transportada por el haz.

Fase de los modos de Gauss-Laguerre de orden superior.

En cuanto a la fase se refiere, no tenemos grandes diferencias. La única serían las nuevas condiciones de existencia de los modos paraxiales utilizados, ya que la condición de existencia, siguiendo el mismo desarrollo que para los modos de Gauss-Hermite, tendrá la forma siguiente:

$$\varpi_0 > \sqrt{b+2 \cdot a+1} \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.118)$$

que poniéndola en función del producto $k\varpi_0$, quedará finalmente,

$$k\varpi_0 > \sqrt{2 \cdot (b+2 \cdot a+1)} . \quad (2.119)$$

Reconsideraciones sobre el criterio de paraxialidad para las soluciones basadas en las funciones de Gauss-Laguerre

Las consideraciones sobre la paraxialidad en este caso, las haremos de la misma manera que en el caso de las funciones de Gauss-Hermite, calculando el campo lejano en los planos definidos para un valor de φ tal que la variación de los campos sea máxima, y no queda anulada ni enmascarada por el término del coseno ($\cos(b\varphi - \varphi_0)$).

En las figuras 2.16, 2.17 y 2.18, tenemos representado el error paraxial cometido para los primeros modos gaussianos basados en las funciones de Gauss-Laguerre, utilizando la misma definición del error paraxial cometido que en el caso de las funciones de Gauss-Hermite, ecuación 2.106.

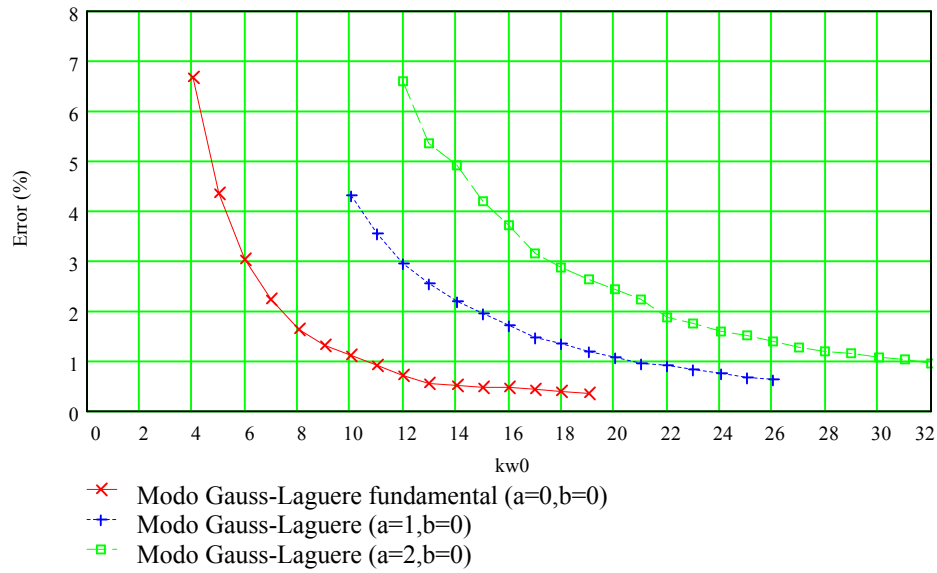


Figura 2.16: Error de la aproximación paraxial de los modos de Gauss-Laguerre con $b=0$, en función del producto $k w_0$.

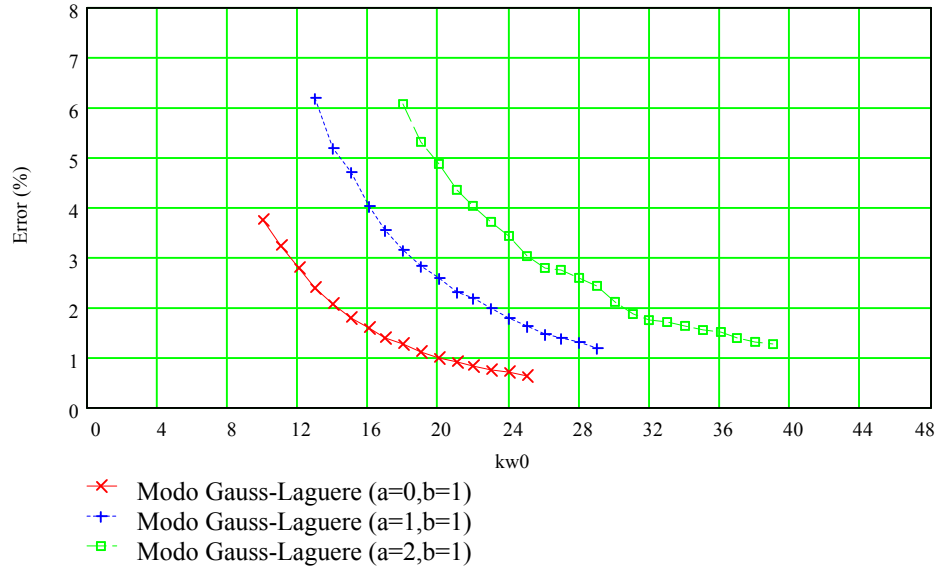


Figura 2.17: Error de la aproximación paraxial de los modos de Gauss-Laguerre con $b=1$, en función del producto $k w_0$.

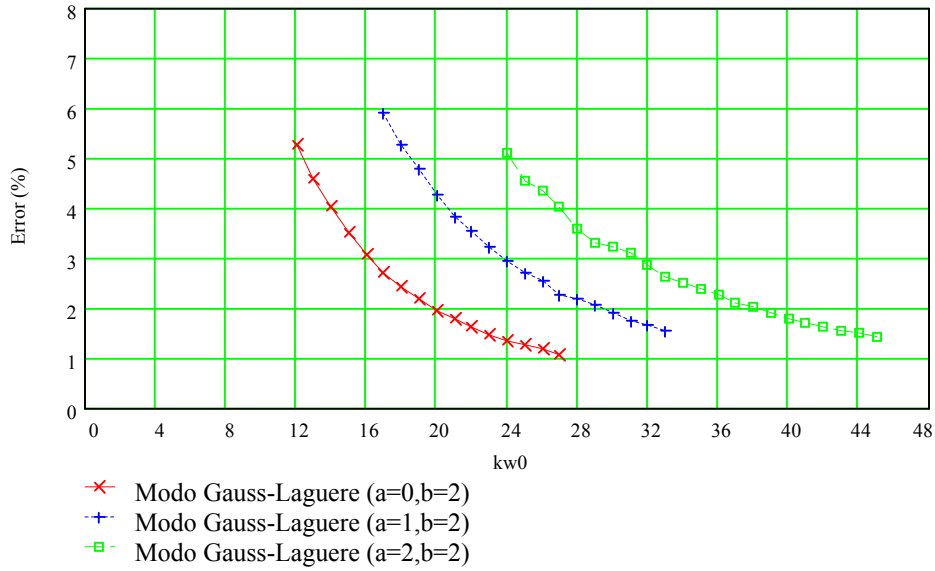


Figura 2.18: Error de la aproximación paraxial de los modos de Gauss-Laguerre con $b=2$, en función del producto $k w_0$.

A la vista de estos resultados, podemos establecer el nuevo criterio de paraxialidad para esta familia de soluciones, mediante la condición:

$$k w_0 \gg 6(a + b + 1) \quad (2.120)$$

Es importante hacer notar, que en este caso, la condición de paraxialidad no es tan importante como en el caso de las funciones de Hermite, ya que estas, tienen el lóbulo que transporta una mayor cantidad de potencia situado en la parte más externa, precisamente en la zona más peligrosa en cuanto a la paraxialidad se refiere, mientras que las funciones de Laguerre, el máximo lóbulo está siempre en la zona más cercana al eje.

Capítulo 3.- Generación de modos gaussianos mediante antenas de bocina.

Como hemos visto en el capítulo de introducción, los generadores más utilizados en estos rangos de frecuencias milimétricas, al trabajar con grandes valores de potencia, ofrecen ésta mediante una estructura de guía de onda. Normalmente, para aplicaciones de alta o media potencia, la guía de ondas será circular, pero también podemos tener aplicaciones que utilicen guías de onda de sección rectangular.

En este capítulo se pretende resolver el problema de acoplar la energía que se recibe a través de una estructura metálica, guía de ondas, al espacio libre de una manera óptima, para posteriormente ser guiada de forma eficiente con una línea de transmisión cuasi-óptica.

En primer lugar, se estudiará la posibilidad de expresar las estructuras de campo del interior de la guía en función de los modos del espacio libre y viceversa. La finalidad de este estudio es la de verificar si las bases elegidas, dentro y fuera de la guía, son correctas y si se pueden expresar los modos del interior de la guía utilizando los modos del espacio libre definidos sobre un plano, y viceversa.

Lógicamente, de este estudio se obtendrán algunas restricciones sobre los casos concretos de aplicación o no de estas bases. Por ejemplo, los modos del espacio libre deberán ser funciones más o menos acotadas a las dimensiones físicas de la guía de onda (no podemos definir una función ilimitada como combinación de funciones limitadas a una región, guía de ondas).

Una vez estudiadas las relaciones entre los modos del espacio libre y del interior de la guía de ondas, y habiendo fijado las limitaciones adecuadas, se pasará a diseñar el componente que adapta, de una manera óptima, la guía de ondas con el espacio libre. Parece lógico pensar en un componente tipo antena de bocina para este fin, ya que por

definición es un componente de transición entre la estructura de una guía de ondas y el espacio libre.

En este capítulo se trabajará con los campos generados en sistemas basados en gyrotrones clásicos [Edgcombe, 93; Gaponov-Grekhov, 94], con una salida en guía circular lisa como combinación de modos TE_{0m} , trabajando a frecuencias milimétricas. En estos sistemas, la energía debe ser transportada desde el generador hasta el experimento mediante una guía de ondas. Rara vez, la mezcla de modos generados por el gyrotrón es utilizada para incidir sobre el experimento, por lo que resulta muy habitual realizar cambios en la estructura de campos durante el trayecto, con la idea de minimizar las pérdidas totales y los costes.

Hasta hoy en día, debido a que la mayoría de aplicaciones requerían un buen apuntamiento de la energía (calentamiento de plasmas, radar, etc.) [Gaponov-Grekhov, 94], se optaba por un modo HE_{11} de guía circular corrugada como salida del sistema, por tener un patrón de radiación cuasi-gaussiano y poder concentrar la potencia en un punto relativamente pequeño con una polarización bien definida. En un principio esta conversión se realizaba al final del sistema de transmisión, por razones de costo, ya que la guía corrugada es más cara que la guía lisa. También por esa misma razón, se optaba por transportar la potencia en un modo de guía lisa con bajas pérdidas, TE_{01} , pese a saber que el modo de guía corrugada HE_{11} tiene pérdidas menores.

La solución más clásica a la conversión $TE_{01} \rightarrow HE_{11}$, era la de utilizar un modo intermedio TE_{11} , que se genera mediante perturbaciones de curvatura de la guía lisa a partir del modo TE_{01} [Li, 91], y llegar finalmente a generar el modo HE_{11} mediante un adaptador de guía lisa a corrugada optimizado convenientemente, [Thumm, 85 y 91].

Posteriormente se aplicó una antigua idea como solución más económica, ya que mediante un solo componente es posible generar un haz gaussiano fundamental a partir de modos de guía lisa. Este componente no es otro que la antena de Vlasov [74 y 75], que debe adoptar formas diferentes en función del modo de entrada.

Esta tecnología se incorporó rápidamente al diseño de gyrotrones, de manera que el modo de salida de los gyrotrones pasó a ser una estructura cuasi-gaussiana, posibilitando la existencia de una guía de ondas cuasi-óptica, en principio más económica y versátil que las guías convencionales basadas en estructuras metálicas cerradas.

Hoy en día, existen aplicaciones, como por ejemplo, la síntesis de cerámicas avanzadas, recubrimiento de superficies, etc., en las que no se requieren las características de apuntamiento de un haz gaussiano fundamental. Y lo único que interesa es llevar la potencia hacia el experimento de la forma más eficiente posible. No importa la forma en que la potencia llegue, ya que tan pronto llegue será sometida a un proceso de aleatorización, con tal de tener en el interior de la cavidad final, una distribución de campos lo más uniforme posible.

En este trabajo, se presenta el caso particular de antenas de bocina en guía de ondas circular lisa, que partiendo de las mezclas de salida de los gyrotrones clásicos, combinación de modos TE_{0m} , permiten obtener modos gaussianos de orden superior. Por el hecho de trabajar con guía circular y a las peculiaridades de los modos TE_{0m} , se elige como base de representación en el espacio libre los modos gaussianos basados en los polinomios de Laguerre, conocidos por ello, como las soluciones de Gauss-Laguerre.

Pese a que este trabajo se centra en la aplicación de las antenas de bocina para los modos TE_{0n} de guía circular lisa, todos los conceptos empleados, son absolutamente generales y aplicables a otros tipos de estructura de guías de onda (circular, cuadrada o rectangular ya sea corrugada o no) o incluso dentro de un mismo tipo de guía de onda, a otros modos (TE_{11} en guía circular, HE_{11} en guía circular corrugada, TE_{10} y TE_{11} de guía rectangular, etc.). Por su extensión, estos temas constituyen una futura línea de trabajo.

Como se demostrará en el capítulo siguiente, los modos gaussianos generados por estas antenas de bocina, pueden ser utilizados para transportar la potencia a través de una guía cuasi-óptica.

3.1.- Modos gaussianos y modos de guía

En este primer apartado, se pretenden validar los sistemas de representación utilizados. Debido a las características propias del componente, es decir, empezar en guía de onda y terminar en el espacio libre, se deberá asegurar que los sistemas de representación en los dos medios sean compatibles en la interfase. Esta compatibilidad se reflejará en poder expresar, de una manera unívoca, una distribución de campos en la interfase con cualquiera de las dos bases.

Para ello se estudiarán los modos de guía, y se intentará relacionarlos con los modos del espacio libre, vistos en el capítulo anterior (ecuación 2.34). Realizaremos básicamente dos experimentos; en primer lugar, obtención del patrón de radiación de cualquier mezcla de modos de guía, como combinación de modos del espacio libre (Gauss-Laguerre), y el proceso contrario, expresar los campos de un modo gaussiano, como combinación de modos de guía de ondas. Realizando estas dos pruebas, se podrán determinar las limitaciones del componente que pretende obtener modos gaussianos a partir de modos de guía.

Modos de guía circular: modos TE_{0m}

De una forma muy breve, vamos a recordar, la forma de los campos de los modos de la guía de onda circular, ya que será esta la estructura elegida para realizar todos los desarrollos que se presentan. En concreto, se estudian los modos TE_{0m} , por ser la salida de los gyrotrones clásicos.

El sistema de representación será el cilíndrico, por afinidad con la propia estructura de la guía de ondas. Resolviendo la ecuación de onda en el interior de la guía de onda circular [Collin, 92], obtenemos dos tipos de modos:

- TE o H, que se caracterizan por tener el vector del campo eléctrico transversal al eje de propagación ($E_z = 0$),
- TM o E, que se caracterizan por tener el vector del campo magnético transversal al eje de propagación ($H_z = 0$).

Las expresiones totales de los campos para los modos TE_{0m} son las siguientes [Collin, 92]:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(r, \phi, z) &= 0 \cdot \vec{r} + \left(\frac{jk_0 Z_0 \cdot a}{X'_{0,m}} J'_0 \left(\frac{X'_{0,m}}{a} r \right) e^{-j\beta_{0,m} z} \right) \cdot \vec{\phi} + 0 \cdot \vec{z} \\
\vec{H}(r, \phi, z) &= \left(\frac{-j\beta_{0,m} \cdot a}{X'_{0,m}} J'_0 \left(\frac{X'_{0,m}}{a} r \right) e^{-j\beta_{0,m} z} \right) \cdot \vec{r} + 0 \cdot \vec{\phi} + J_0 \left(\frac{X'_{0,m}}{a} r \right) \cdot \vec{z}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde J_0 y J'_0 , son la función de Bessel de orden cero y su derivada respecto a r , $X'_{0,m}$ es el cero m-ésimo de la derivada respecto a r de la función de Bessel de orden cero, k_0 y Z_0 el módulo del vector de onda y la impedancia característica del vacío, a el radio de la guía y $\beta_{0,m}$ la constante de propagación asociada al modo TE_{0m} , definida como:

$$\beta_{0,m} = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{X'_{0,m}}{k_0 a} \right)^2}. \tag{3.2}$$

Se puede apreciar, que para estos modos, el campo eléctrico tiene únicamente una componente no nula, por lo que quedan definidos todos los campos conociendo únicamente la componente ϕ del campo eléctrico.

Las características más importantes de los modos TE_{0m} , son la simetría de revolución y un nulo de radiación en el eje central. Son precisamente estas características, las principales causas de rechazo de utilización de estos modos en todas las aplicaciones que requieren algún tipo de lanzamiento directivo de la potencia.

Modos gaussianos cónicos

Como se ha comentado varias veces en el capítulo anterior, existen infinitas posibilidades para definir la base generadora utilizada en el espacio libre, y el único factor a tener en cuenta para decidirse por una base u otra será la geometría particular de cada caso, con la idea de utilizar un número mínimo de modos propios para definir las distribuciones de campo generadas.

La excitación del espacio libre, en nuestro caso, procedente de un gyrotrón, será una combinación de modos TE_{0m} , lo que significa que existirá una simetría de revolución en las fuentes que sería conveniente tener en cuenta a la hora de elegir la base del espacio libre. Otro dato importante, es el nulo central que poseen todos los modos TE_{0m} , lógicamente una combinación lineal de estos seguirá teniendo un cero en el eje. Además, no se debe olvidar el tema de la polarización, por ser otra característica peculiar de estos modos, ya que es la componente ϕ del campo eléctrico la que define la forma de este.

A la hora de definir la base del espacio libre, se deberán tener en cuenta todas estas peculiaridades de los modos que serán la excitación, ya que sería muy conveniente que la base elegida reuniera también todas estas características con el fin de simplificar al máximo la representación de posibles combinaciones de modos TE_{0m} de guía de onda circular.

Al trabajar con estructuras de campo en el interior de una guía de onda circular, y con modos con simetría de revolución, será conveniente elegir un sistema de representación de coordenadas cilíndricas, ya que de esta manera el número de soluciones propias que será necesario utilizar para cada caso será siempre menor que con cualquier otro tipo de representación.

Podríamos utilizar los modos gaussianos basados en las funciones de Gauss-Laguerre (ecuaciones 2.34, 2.108 y siguientes), como base del espacio libre para representar la radiación de los modos TE_{0m} de guía circular lisa. Sin embargo, los modos que en esta base tienen una simetría de revolución (índice azimutal nulo, $b=0$), no tienen un nulo en el centro, sino todo lo contrario, y los modos que tienen un nulo central no tienen simetría de revolución. Esto complica bastante la representación utilizando esta base, ya que el número de soluciones propias a utilizar sería bastante grande, y no se aprovecharía la posible ventaja, numéricamente hablando, de la simetría de revolución.

Debido a las razones aducidas en el párrafo anterior, se desechará como base las funciones de Gauss-Laguerre tal y como las hemos definido en el capítulo anterior. No obstante, que la base completa no sea la mejor opción, no implica que se pueda formar una nueva base combinando algunas soluciones propias de esta base. Por ejemplo, si se define como base:

$$\Psi_m(r, \phi, z) = \Psi_m^{1,0}(r, \phi, z) \cdot \hat{x} + \Psi_m^{1,0}(r, \phi, z) \cdot \hat{y} \quad (3.3)$$

siendo \hat{x} y \hat{y} los vectores unitarios en dos direcciones perpendiculares entre si y a la dirección de propagación¹; teniendo en cuenta que las dos estructuras tienen un desfase de $\pi/2$, en términos de densidad potencia nos quedará:

$$\Psi_m(r, \phi, z)^2 = \Psi_m^{1,0}(r, \phi, z)^2 + \Psi_m^{1,\frac{\pi}{2}}(r, \phi, z)^2 \quad (3.4)$$

que si se desarrolla utilizando las expresiones del capítulo anterior (2.116), se obtiene:

¹ La nomenclatura utilizada es la misma que en el capítulo anterior, Ψ_a^{b,ϕ_0} , incluye la exponencial de propagación (ecuación 33 de capítulo 2 de este trabajo).

$$\Psi_m(r, \phi, z)^2 = \left(C \frac{1}{\varpi} P_m^1\left(\frac{r}{\varpi}\right) e^{-\frac{r^2}{\varpi^2}} e^{-j\frac{kr^2}{2R}} e^{j2(m+1)\Theta} \right)^2 \cos(\phi)^2 + \left(C \frac{1}{\varpi} P_m^1\left(\frac{r}{\varpi}\right) e^{-\frac{r^2}{\varpi^2}} e^{-j\frac{kr^2}{2R}} e^{j2(m+1)\Theta} \right)^2 \sin(\phi)^2 \quad (3.5)$$

pudiendo eliminar los términos dependientes del ángulo ϕ , obteniendo unas estructuras con simetría de revolución de la forma:

$$\Psi_m(r, \phi, z) = C \frac{1}{\varpi} P_m^1\left(\frac{r}{\varpi}\right) e^{-\frac{r^2}{\varpi^2}} e^{-j\frac{kr^2}{2R}} e^{j2(m+1)\Theta}. \quad (3.6)$$

En la figura 3.1 se representa de una manera gráfica el proceso anterior, pudiendo comprobar la forma final del modo fundamental de la base elegida. Los modos siguientes o de orden superior, tendrán un número de círculos de potencia concéntricos igual al índice m del modo en cuestión.

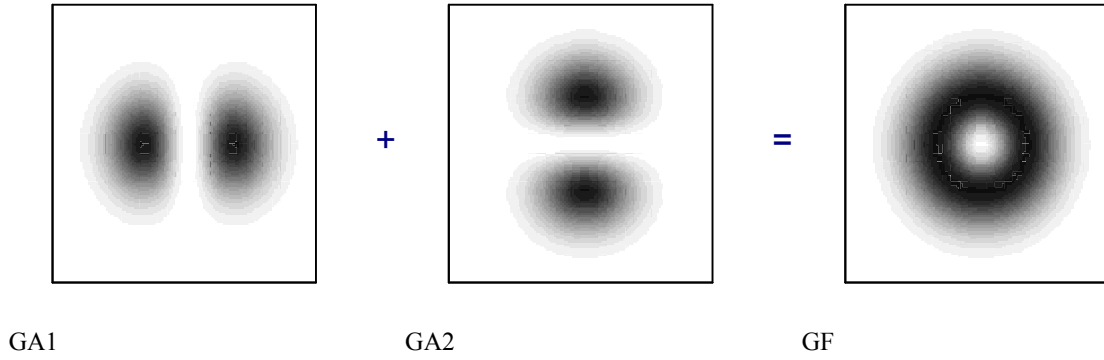


Figura 3.1: Proceso de obtención del primer modo gaussiano con simetría de revolución con un nulo en el eje Ψ_0 .

Se puede demostrar que los modos obtenidos, siguiendo el proceso anterior, cumplen la condición de ortogonalidad [Wencker, 69] siguiente:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_a(r, \phi, z) \overline{\Psi_b(r, \phi, z)} r dr d\phi = \delta_{a,b} \frac{\pi}{4} (a+1), \quad (3.7)$$

por lo que se puede elegir como base generadora, que además será óptima para el caso de representar distribuciones con simetría de revolución con un nulo central, como es el caso de los modos TE_{0m} .

Además, se puede comprobar fácilmente que también tenemos polarizaciones compatibles. Teniendo en cuenta que las expresiones Ψ_a^{b, φ_0} definen las dos componentes transversales del campo en este caso eléctrico, x e y , se puede comprobar como la combinación de dos modos con $b=1$, mismo valor de a y un desfase espacial de

90 grados, generan una polarización en ϕ , del mismo tipo que los modos de guía circular lisa TE_{0m} (figura 3.2).

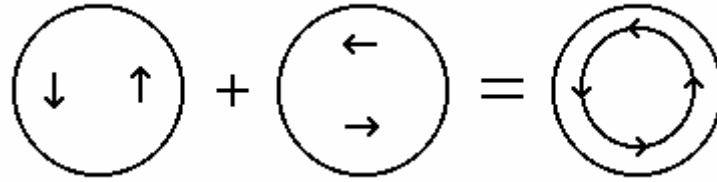


Figura 3.2: Verificación de la polarización de la combinación de dos modos gaussianos de Gauss-Laguerre con $b=l$, mismo valor del índice a y un desfase espacial de 90 grados.

Las formas de los frentes de fase de los nuevos modos gaussianos cónicos son exactamente iguales a los modos de Gauss-Laguerre originales, Ψ_m^l , y la forma del módulo queda modificada revolucionando el plano $\phi = 0$. En la figura 3.3, se representan los perfiles de densidad potencia de los primeros modos gaussianos que por sus peculiares características los denominaremos como cónicos.

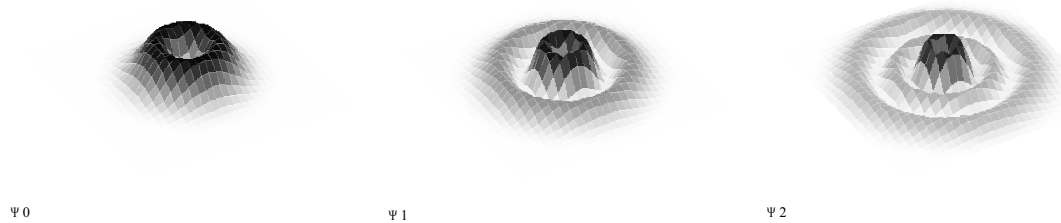


Figura 3.3: Representación de los perfiles de densidad potencia de los tres primeros modos gaussianos cónicos, Ψ_0 , Ψ_1 y Ψ_2 .

Una vez definida la densidad potencia de estos modos gaussianos, resulta muy simple la representación del campo lejano de este tipo de estructuras, como se vio en el capítulo anterior, sólo habría que tener en cuenta que en este caso tenemos simetría de revolución también en el patrón de radiación.

3.1.1.- Patrón de radiación de modos TE_{0m} como combinación de modos gaussianos cónicos

Una vez vistas las características más importantes de los modos de guía TE_{0m} y los modos del espacio libre elegidos como base, los modos gaussianos cónicos, en este

apartado, se va a intentar definir los campos del interior de la guía de onda como una combinación lineal de estos modos gaussianos.

Hemos visto que con definir la componente ϕ del campo eléctrico es suficiente para tener absolutamente definidos los campos de los modos TE_{0m} . Por otro lado, los haces gaussianos, Ψ_m , por definición tienen la misma forma de polarización, ya que podemos decir que la función Ψ_m define la componente ϕ del campo eléctrico. Para un valor de $\phi=0$, la componente tangencial del campo eléctrico de las estructuras gaussianas se corresponde exactamente con la componente x , de la que conocemos la expresión exacta (3.6).

Teniendo en cuenta todo esto, y aprovechando la simetría de revolución existente, podemos descomponer la componente ϕ del campo eléctrico de un modo TE_{0m} como una combinación lineal de las funciones Ψ_m , de la siguiente manera:

$$E_{\phi TE_{0m}} = \sum_n C_{mn} \Psi_n \quad (3.8)$$

siendo C_{mn} los coeficientes de correlación obtenidos mediante la integral:

$$C_{mn} = \int_0^\infty E_{\phi TE_{0m}}(r, \phi, z) \Psi_n(r, \phi, z)^* 2\pi r dr . \quad (3.10)$$

Para comprobar, estas afirmaciones, calcularemos un ejemplo, en el que buscaremos el diagrama de radiación en campo lejano de un modo TE_{01} de guía lisa por las fórmulas convencionales [Garin, 89; Silver, 84], y como la combinación de modos gaussianos, de los que podemos calcular el diagrama de radiación simplemente expandiendo el haz y representando los campos sobre una esfera de radio suficientemente grande.

En la figura 3.4 tenemos representados los dos diagramas de radiación en campo lejano. Podemos observar muy claramente la limitación que nos está imponiendo el utilizar esta familia de modos del espacio libre al ser una familia gaussiana obtenida bajo la suposición de paraxialidad.

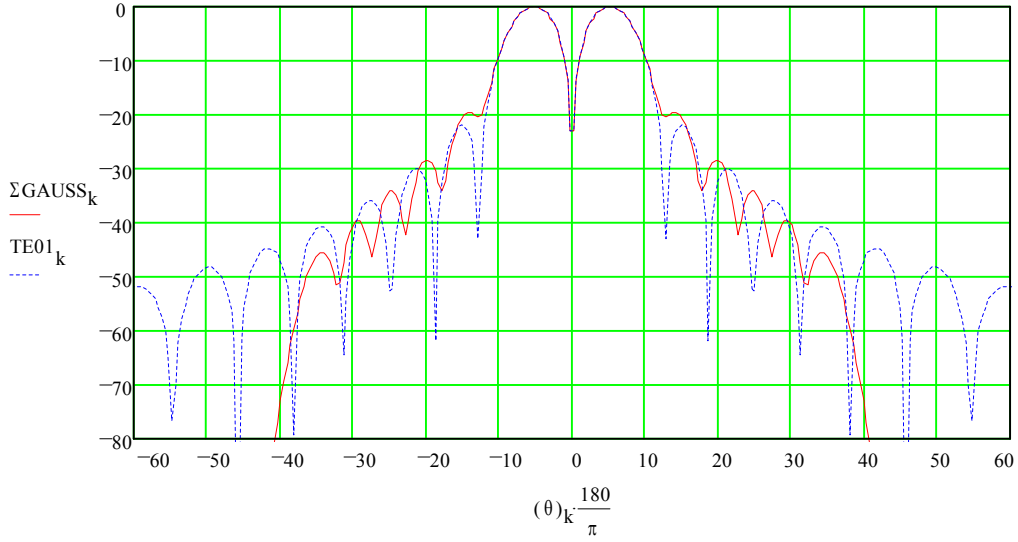


Figura 3.4: Diagrama de radiación en campo lejano de modo de guía lisa TE_{01} junto con combinación lineal de modos gaussianos (71.8% de Ψ_0 , 25.5% de Ψ_1 y 1.9% de Ψ_2). ($f=30.3\text{GHz}$., $R=50\text{mm}$, $\varpi_0=20\text{mm}$.)

Obtenemos una coincidencia muy grande en la zona cercana al eje central del diagrama, cosa totalmente lógica si tenemos en cuenta la paraxialidad de las soluciones del espacio libre empleadas. Si calculamos la potencia encerrada por un cono de un ángulo de valor aproximado a 11° , para la mezcla de modos gaussianos y para el modo TE_{01} puro, obtenemos los siguientes valores:

$$\text{Potencia } \Sigma\text{GAUSS } (\theta < 11^\circ) = 99.16920 \%$$

$$\text{Potencia } TE_{01} (\theta < 11^\circ) = 99.55648 \%$$

Como vemos las diferencias son realmente muy pequeñas, ya que prácticamente el 99.2 % está encerrado en un cono de 11° , y es precisamente en esa zona donde las curvas son más coincidentes.

Para realizar esta gráfica se ha elegido un valor ϖ_0 y frecuencia de trabajo que cumpla las condiciones de paraxialidad estudiadas en el capítulo anterior.

En la figura 3.5, tenemos una representación de las mezclas de modos gaussianos que necesitamos para expresar los campos del TE_{01} . Si mantenemos la relación entre el radio de la guía y el valor de la cintura del haz, los coeficientes de la combinación de modos gaussianos se mantiene, independientemente de la frecuencia elegida. (La condición de paraxialidad definida en el capítulo anterior, ecuación 2.120, definirá a partir de qué punto empiezan a ser valores reales y fiables, este punto será diferente para distintas frecuencias.)

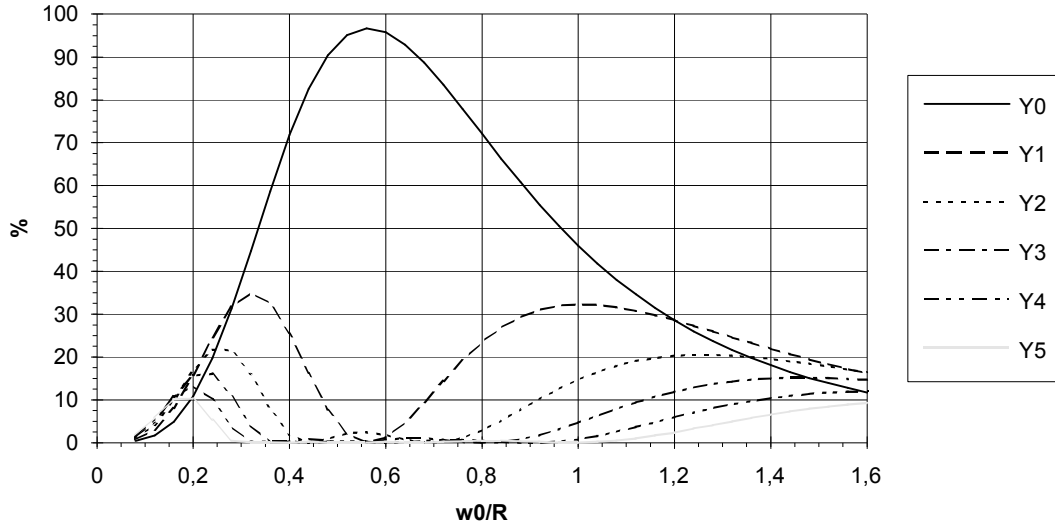


Figura 3.5: Mezclas de modos gaussianos cónicos Ψ_m ($m=0..5$) necesarias para representar un modo TE_{01} de guía de onda circular.

Se puede apreciar un máximo del primer modo gaussiano cónico, hasta un nivel aproximado de 96.7% cuando $w_0=0.565R$. En cualquier caso, los diagramas de radiación en campo lejano que se obtienen, siguen siendo muy parecidos en la zona paraxial.

3.1.2.- Obtención de una estructura gaussiana como combinación de modos TE_{0m}

De una manera complementaria al caso anterior, podemos buscar la combinación de modos de guía que se necesita para formar un modo gaussiano. Ahora, tendremos que redefinir la relación, entre las estructuras gaussianas y los modos de guía, empleada para el estudio anterior (3.8), de la siguiente manera:

$$\Psi_n = \sum_m C_{mn} E_{\phi TE_{0m}} \quad (3.10)$$

quedando los coeficientes definidos por la misma integral de correlación anterior (3.9).

De esta manera, podremos conocer las mezclas de modos en guía que generan estructuras gaussianas, o lo que es lo mismo, buenos diagrama de radiación en campo lejano, desde el punto de vista de que concentran prácticamente toda la potencia en la zona central del diagrama.

En la figura 3.6 tenemos representadas las mezclas teóricas de modos TE_{0m} de guía circular lisa, para obtener un modo gaussiano cónico, Ψ_0 . Esta gráfica está

calculada en el punto $z = 0$, por lo que todos los términos de fase del haz gaussiano y de los modos en guía quedan anulados, obteniendo los coeficientes C_{mn} reales.

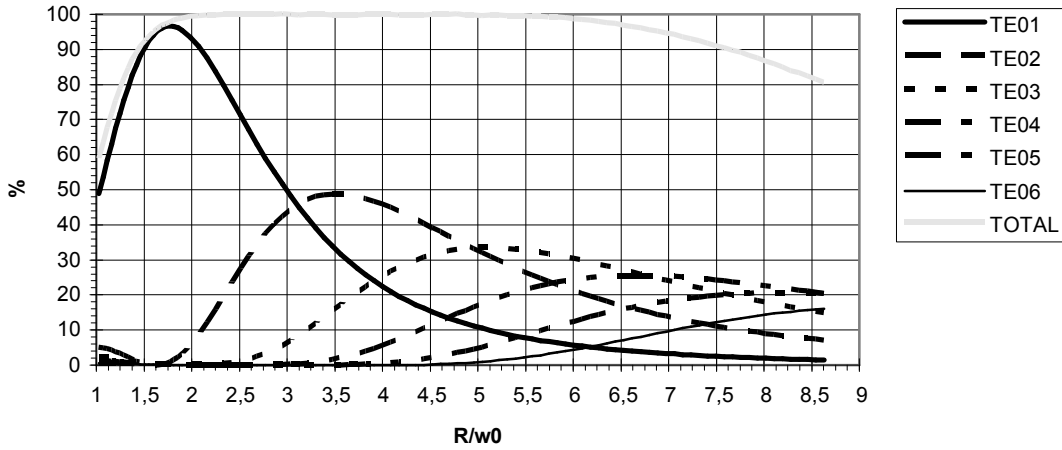


Figura 3.6: Representación, para diferentes relaciones (R/ϖ_0) , de los porcentajes de modos de guía necesarios para generar un modo gaussiano Ψ_0 con simetría de revolución.

Si repetimos los cálculos para cualquier otro valor de la variable z , siempre y cuando tengan sentido los cálculos (si nos alejamos mucho, la expansión del modo gaussiano puede llegar a “salirse” de la guía de onda de radio R , por lo que los cálculos carecerían de sentido), obtendremos unos nuevos coeficientes con exactamente el mismo módulo que el caso de $z = 0$, pero con diferente fase.

También con esta prueba, se vuelve a observar que manteniendo la relación entre el radio de la guía de ondas R y el valor de la cintura de haz, ϖ_0 , obtenemos exactamente la misma mezcla de modos de guía para obtener un gaussiano. Al igual que ocurría con la gráfica 3.5, también se observa cierta independencia de la frecuencia de la gráfica 3.6.

En la gráfica se representa la suma de potencia de los modos representados, se puede observar que en la zona inicial, no llega al 100%. Esto es debido a que en esa zona no es posible representar un gaussiano con una combinación de modos de guía, ya que estos están limitados a un radio R , que es de un valor muy parecido al valor del ϖ_0 del gaussiano, lógicamente el gaussiano en estos casos tiene unos valores bastante grandes fuera del diámetro de la guía de ondas. También, al final de la gráfica se puede observar una caída de la suma total por debajo del 100%, pero en este caso es simplemente debido a que debemos incluir más modos en la representación.

En la práctica, también deberemos buscar, utilizando la condición de paraxialidad (2.120), el punto a partir del cual las mezclas obtenidas serán fiables y reales.

Una característica bastante interesante de esta gráfica, es que el único parámetro utilizado para definir la estructura gaussiana es el valor de la cintura de haz, y no se utiliza para nada la posición de este.

Esto nos hace volver a plantearnos la cuestión anterior, sobre las diferentes fases de los coeficientes obtenidas para diferentes posiciones, manteniendo los valores de los módulos de estos mismos coeficientes (figura 3.6). En otras palabras, si mantenemos fija una base generadora, que en este caso son los modos TE_{0m} de una guía circular de radio R , e intentamos representar con esta base un modo gaussiano en diferentes valores de z , obtendremos siempre los mismos porcentajes de potencia de los modos TE_{0m} de guía que forman el modo gaussiano, pese a saber que los campos de una estructura gaussiana se expanden al propagarse en z . Teniendo esto en cuenta, rápidamente podemos concluir, que si somos capaces de generar la mezcla de modos en guía que corresponde con un gaussiano en una posición determinada, únicamente tenemos que variar las fases de los modos adecuadamente, y estaremos expandiendo un modo gaussiano en el interior de una guía de radio R (figura 3.7).

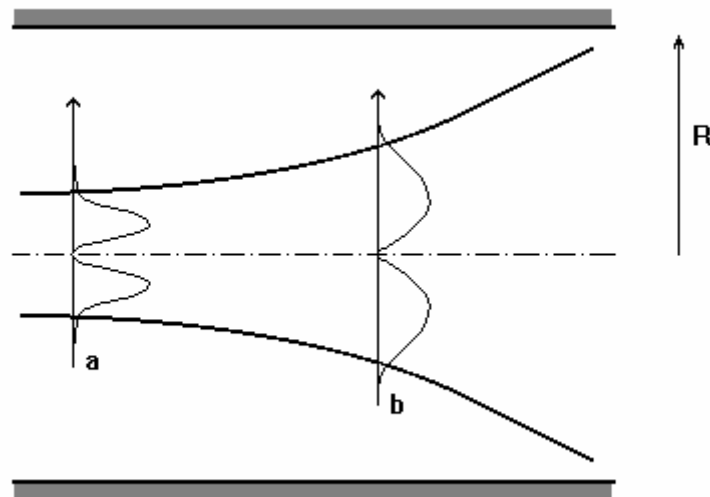


Figura 3.7: Expansión de un modo gaussiano en el interior de una guía de ondas circular de radio R .

El problema estará en variar adecuadamente las fases instantáneas de los diferentes modos, ya que estas velocidades de cambio de las fases no corresponden ni con las constantes de propagación en el interior de una guía de ondas de radio R (β_{0m}),

ni con la espacio libre (k_0), como se demostrará a continuación. Por lo que en principio no será posible propagar un modo gaussiano como una combinación fija de modos de la guía de ondas de radio R, a no ser que diseñemos un medio ficticio, con las constantes de propagación adecuadas.

En la tabla 3.1 tenemos los valores de los coeficientes obtenidos para una relación entre el radio de la guía R y el valor de cintura del haz,

$$\frac{R}{\varpi_0} = 6.75911 \quad (3.11)$$

podemos comprobar que los porcentajes de potencia obtenidos como fruto de las correlaciones a distintas distancias, coincide con el punto de la gráfica 3.6, indicado por la ecuación 3.11.

En la tabla se puede apreciar una dependencia proporcional de las fases instantáneas con la distancia, así como los valores de las constantes de propagación aparentes (calculados a partir de los valores instantáneos de las fases para cada modo). Para tener una idea de lo que suponen estos valores, hay que tener en cuenta que estamos trabajando con una frecuencia de 30.3GHz., lo que implica un valor del número de onda de aproximadamente 635 rad/m.

Modo	Potencia (%)	Fase (grados)				β (rad/m)	
		z = 0	z=25mm	z=30mm	z=60mm	aparnt.*	TE _{0m} **
TE ₀₁	3.692	0	189.621	11.545	23.092	635.036	632.365
TE ₀₂	15.277	0	189.537	11.445	22.89	634.976	626.0257
TE ₀₃	25.619	0	189.217	11.061	22.12	634.752	615.930
TE ₀₄	25.561	0	188.39	10.068	20.139	634.177	601.890
TE ₀₅	17.293	0	186.647	7.977	15.949	632.956	583.622
TE ₀₆	8.432	0	183.398	4.078	8.153	630.689	560.711
TE ₀₇	3.064	0	177.785	357.342	354.702	626.782	532.561
TE ₀₈	0.847	0	168.536	346.243	332.491	620.318	498.282

(*) Constantes de propagación aparentes, calculada a través de los valores de fase de la tabla.

(**) Constantes de propagación asociadas a los modos TE_{0m} en una guía de radio R.

Tabla 3.1: Coeficientes de correlación entre los modos de guía circular TE_{0m} y un modo gaussiano cónico Ψ_0 , con $R/\varpi_0 = 6.76$, trabajando a una frecuencia de 30.3GHz.

Efectivamente, los valores requeridos para las velocidades de cambio de las fases instantáneas son totalmente hipotéticos, ya que son valores muy cercanos al valor del número de onda en el vacío (en este caso, 635 rad/m), y por supuesto, no tienen ninguna relación con las constantes de propagación de los diferentes modos en una guía de radio R . Esto viene a decirnos, que no es posible propagar una estructura gaussiana dentro de una guía de ondas circular, por muy sobredimensionada que sea, ya que los modos en los que se descompondría el modo gaussiano deberían tener unas constantes de propagación diferentes a las impuestas por la estructura de la guía, cosa físicamente imposible.

Igualmente que para el modo gaussiano cónico fundamental, Ψ_0 , podemos realizar el mismo proceso para cualquier otro modo gaussiano, pudiendo observar los mismos efectos, tanto el mantenimiento de los módulos de los coeficientes, como el reajuste de las fases según la posición del haz.

Existe una limitación lógica para este proceso, y es cuando el haz en la posición que lo queremos representar como combinación de modos TE_{0m} de una guía de radio R , tiene una anchura mayor o cercana a R , con la base elegida (acotada por el radio R) no seremos capaces de cubrir toda la superficie significativa del haz gaussiano en cuestión (correspondería con la parte baja de la figura 3.6 anterior).

3.2.- Antenas de bocina adaptadoras de modos gaussianos

De las experiencias anteriores podemos sacar varias conclusiones. En primer lugar, que cuando intentamos representar como combinación de haces gaussianos una estructura de campo, esta tiene que cumplir ciertas limitaciones de paraxialidad. Visto desde el punto de vista del diagrama o patrón de radiación en campo lejano, una estructura paraxial será aquella que concentre la mayor parte de la potencia en la parte central o cercana al eje de propagación, siguiendo la definición clásica [Saleh, 91].

Otra conclusión importante es la posibilidad de representar una estructura gaussiana como una combinación lineal de modos propios de guía de onda, utilizando un número finito de modos. Esto nos puede llevar a pensar en la posibilidad de generar cualquiera de las mezclas presentadas en la gráfica 3.6, probablemente mediante conversiones controladas de modos, utilizando la teoría bien conocida de acoplo de modos en el interior de una guía de ondas por deformaciones simétricas en las paredes de la misma [Thumm, 84; Doane, 85]. Pero nos surge inmediatamente un grave problema, que muy probablemente en la mayoría de los casos no podamos solventar, las fases. Utilizando la teoría de acoplo modal podemos únicamente llegar a controlar las fases relativas de un par de modos, por lo que en cualquier mezcla de más de dos modos será prácticamente imposible conseguir fijar las fases adecuadas.

También hemos visto que no es posible expandir una estructura gaussiana en el interior de una guía de ondas circular, debido a que las constantes de propagación de los modos en el interior no lo permiten. Como ya se ha demostrado, para expandir un modo gaussiano, necesitamos que los modos TE_{0m} que lo componen tengan unas constantes de propagación muy cercanas a las de una onda plana uniforme en el espacio libre (k), es decir, prácticamente como si estuviesen fuera de la guía de ondas.

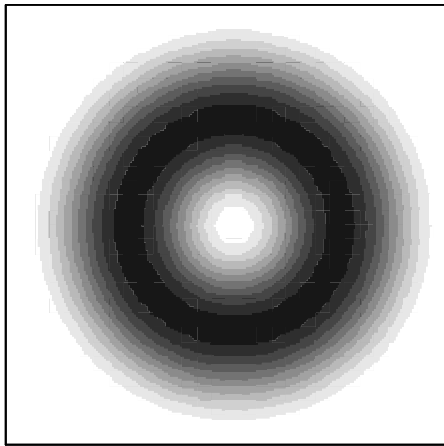
Teniendo en cuenta estas consideraciones, ¿puede pensarse en generar eficientemente estructuras gaussianas a partir de modos TE_{0m} de guía circular lisa, siempre y cuando se cumplan las condiciones de paraxialidad del capítulo anterior?

3.2.1.- Consideraciones previas sobre la forma de la antena

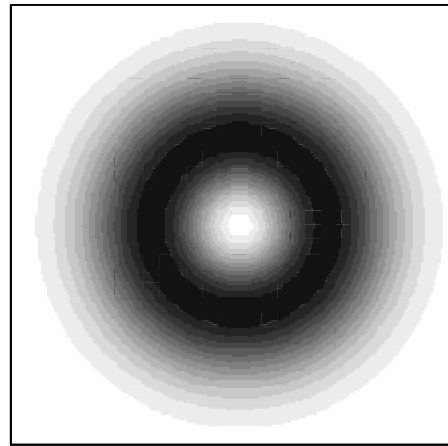
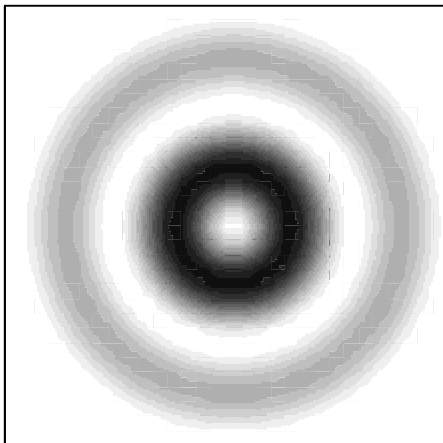
Con una rápida inspección de las gráficas anteriores (figura 3.3), podemos llegar a la conclusión de que existe una gran correlación entre las estructuras gaussianas

elegidas como base (3.6) y los modos TE_{0m} de guía circular lisa. En la figura 3.8 podemos ratificar esta afirmación, ya que tenemos representados las distribuciones de densidad de potencia en un plano transversal de los primeros modos gaussianos cónicos y de los modos de guía de onda TE_{0m} .

Debido a este gran parecido entre las estructuras que deberán ser la excitación y el resultado final y deseado de nuestro componente, parece lógico pensar en la posibilidad de que puede existir un componente que genere modos gaussianos cónicos a partir de los modos TE_{0m} de guía de ondas circular lisa.



TE01

 $\Psi 0$ 

TE02

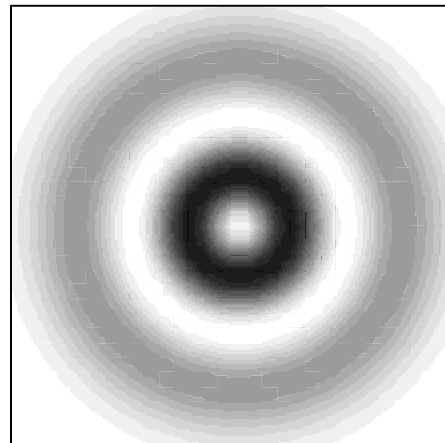
 $\Psi 1$

Figura 3.8: Representación de la distribución de densidad de potencia en un plano transversal de los dos primeros modos gaussianos cónicos con valores de ϖ_0 de 0.565 y 0.49 veces el radio para el primer y segundo modos respectivamente, comparados con la misma representación de los modos TE_{01} y TE_{02} de guía circular lisa.

Este componente deberá, desde el punto de vista de impedancias, proporcionarnos una buena adaptación entre el espacio libre, y el interior de una guía de

ondas circular lisa. Si conseguimos una buena adaptación, podremos pensar que la estructura de modos de guía de onda incidente se ha convertido en una estructura que es bien aceptada por el espacio libre, muy probablemente una solución propia del espacio libre o una combinación de estas.

Este componente, también lo podemos ver desde el punto de vista de las constantes de propagación. Hemos visto que necesitamos unas constantes de propagación muy grandes, cercanas al valor del número de onda en el espacio libre, para poder llegar a conseguir generar y mantener una estructura gaussiana. A largo del componente deberemos adaptar las constantes de propagación de entrada (β_{0m} de los modos TE_{0m} de guía circular), con las de salida (constantes de propagación aparentes, tabla 3.1), muy cercanas al número de onda en el espacio libre.

Tanto el razonamiento de impedancias, como el de constantes de propagación, los podríamos resumir en un problema de condiciones de contorno, que por un lado fija un radio de entrada igual al de la guía de excitación, y por otro, un radio teóricamente infinito a la salida para permitir unas constantes de propagación cercanas al número de onda en el espacio libre.

Cumpliendo estas condiciones de contorno, y pensando en funciones continuas como mejores candidatas para sintetizar el perfil del componente que proporcione una buena adaptación tanto de impedancias como de constantes de propagación, tenemos una gran variedad de posibles formas para este componente. No obstante, como veremos a continuación, si analizamos los casos extremos, podremos ver claramente que no todas las funciones continuas son válidas, y que probablemente exista alguna óptima.

Si elegimos una forma que varíe muy lentamente, en el límite llegaremos a una guía infinita de radio prácticamente constante. Así, por ejemplo, si excitamos esta antena de bocina, con un modo TE_{01} puro, al final de la bocina, seguiremos teniendo un TE_{01} puro, con lo que conseguiríamos una eficiencia máxima del 96.7% de conversión al gaussiano cónico Ψ_0 . Si la variación es suficientemente lenta, podremos afirmar que la distribución de modos de entrada permanecerá inalterada a lo largo de todo el componente. Con el radio final de la bocina podríamos conseguir un patrón de radiación más o menos estrecho, pero no podremos subir la eficiencia de conversión que será de un valor muy parecido al correspondiente a la mezcla de entrada.

Si, por el contrario, elegimos una forma que varía demasiado rápido, en el límite tendríamos la guía de ondas de radio R radiando al espacio libre. Esta claro que no es la

mejor manera de adaptar las impedancias, por lo que nunca podríamos incrementar la eficiencia que ya tuviéramos en la mezcla de modos de entrada. Si, como en el caso anterior, tenemos un modo TE_{01} puro como excitación, la eficiencia de conversión sería igualmente del 96.7%.

Hemos visto que en los dos extremos (variación muy lenta y muy rápida), para el caso de excitar con una mezcla determinada (en este caso un modo TE_{01} puro), tenemos el mismo límite sobre la eficiencia final del componente (96.7%).

Si suponemos que variamos la forma del componente de una manera continua, es decir, sin aristas ni saltos bruscos del radio de la guía, es de esperar que la función que define la eficiencia para cada forma diferente del componente sea una función continua. Si esto es así, podemos aplicar el teorema de Rolle: “Si una función continua tiene en dos abscisas el mismo valor, puede suceder que la función sea constante o que entre las dos abscisas exista al menos un máximo o un mínimo relativo”, desechando la posibilidad de una función constante, ya que no tendría sentido práctico, es de esperar que exista un punto intermedio en el que se maximice la eficiencia (siempre tenemos que esperar lo mejor... ya que también podía tratarse de un mínimo de eficiencia, sin embargo, experiencias posteriores darán la razón a los optimistas, ya que realmente existe un máximo).

La manera de definir el perfil del componente tendrá mucho que ver con la evolución de las constantes de propagación en el interior, ya que como hemos visto resulta un parámetro de gran importancia para poder expresar la expansión de una estructura gaussiana.

Si estamos pensando en tener una buena adaptación con el espacio libre, deberemos entender que en la parte final de la antena tendremos el haz en expansión, de la misma manera que pretendemos que suceda cuando este salga del componente. Por esta razón, puede ser interesante estudiar un poco más en profundidad la posibilidad de emplear un perfil de antena que defina la expansión de una estructura gaussiana. A este tipo de perfil le denominaremos “natural”, por seguir el mismo comportamiento de expansión que el haz que finalmente queremos obtener [Del Río, 95a, 95b y 96a; Gonzalo, 96].

3.2.2.- Antena adaptadora “natural”

La ecuación que define la expansión de una estructura gaussiana ha sido presentada en el capítulo anterior, por lo que la forma de estas antenas adaptadoras “naturales” será:

$$r(z) = r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{k\varpi_0^2} \right)^2} \quad (3.12)$$

donde r_0 lo haremos coincidir con el radio de la guía de ondas utilizada para tener una función continua en ese punto, k es el número de onda en el espacio libre y ϖ_0 el valor de la cintura del haz que queremos conseguir.

Con este perfil, estamos cumpliendo todas y cada una de las condiciones que anteriormente hemos impuesto a las posibles soluciones, ya sean las condiciones de contorno, como la continuidad y derivabilidad de la función en todos los puntos respecto a z , el hecho de ser función creciente, nos asegura que las constantes de propagación se acercarán a los valores deseados (aparentes de la tabla 3.1), etc.

Teóricamente, en una antena de este tipo, debido a las variaciones simétricas del radio, la potencia se irá distribuyendo al aumentar el radio, a modos de guía circular con el mismo tipo (TE) y mismo índice azimutal [Doane, 85]. En nuestro caso, como la entrada será un modo TE₀₁, el acoplo se producirá entre los modos TE_{0m}.

Pero, para poder utilizar este perfil con ciertas posibilidades de obtener alguna estructura gaussiana, deberemos partir de una distribución de campos de entrada con ciertas características gaussianas, ya que estamos imponiendo, a través de la variación de la guía, una expansión gaussiana, suponiendo que tenemos el ancho mínimo del haz justo al principio de la antena.

Esta suposición, en cuanto a los frentes de fase puede ser admisible, ya que los frentes de fase de los modos de una guía de ondas los podemos considerar planos, que sería el mismo caso que el frente de fase de un haz gaussiano en la posición de ϖ_0 . Pero en cuanto al módulo, descubrimos que existen diferencias, ya que no tenemos una distribución gaussiana de los campos en la entrada, sino un TE₀₁, que no obstante es bastante parecido (correlación del 96.7% con $\varpi_0=0.565a$).

Este hecho, nos producirá en la práctica un cambio del ϖ_0 deseado, introducido en la forma de la antena, y el que finalmente se obtiene² (tabla 3.2). Diremos que existe una zona de transición, necesaria para corregir la forma de los campos del TE₀₁ hacia una forma más gaussiana.

En cuanto a las eficiencias³ de conversión al cónico fundamental, nos resultará difícil establecer unos límites para esa zona de transición, ya que a lo largo del componente el valor de la eficiencia crece de una manera continua. Al mismo tiempo que aumenta la eficiencia, aumenta también el valor de ϖ_0 de la familia gaussiana que maximiza la conversión al modo gaussiano cónico fundamental. No obstante, siempre llega un punto en que se estabiliza un valor de ϖ_0 de salida prácticamente constante durante una distancia bastante considerable (tabla 3.2).

ϖ_0/R_{in} deseado	ϖ_0/R_{in} obtenido	Eficiencia (%)
0.55	0.61	99.82
0.54	0.61	99.87
0.53	0.605	99.91
0.52	0.605	99.925
0.51	0.6	99.934
0.5	0.595	99.925
0.49	0.595	99.9
0.48	0.59	99.87

Tabla 3.2: Valores deseados, utilizados en la fórmula (3.12), y los valores obtenidos como fruto de la simulación con sus respectivas eficiencias, teniendo como entrada un modo TE₀₁ de guía de onda circular lisa (96.7% con $\varpi_0=0.565 \cdot R_{in}$).

En principio, hemos expresado la fórmula de manera paramétrica con la frecuencia y el radio de la guía. Esto significa que si varía la forma de expansión, debido a que hemos cambiado la frecuencia, la forma de la antena se verá igualmente afectada.

Los resultados presentados en la tabla anterior, admitiendo cierto margen en las eficiencias, podría ser válida para otros valores de frecuencia de trabajo y radio de la guía, siempre y cuando se cumplan las condiciones de paraxialidad de las soluciones del espacio libre empleadas.

² Para la obtención de estos valores se ha realizado una simulación de los componentes, utilizando el método de la matriz de dispersión generalizada junto con el método de análisis modal (Scattering matrix and Mode Matching), obteniendo así la mezcla de modos TE_{0m} de salida del componente. (Apéndice I)

³ Correlando los campos obtenidos con los campos de las estructuras gaussianas, para diferentes valores de ϖ_0 , es decir, diferentes familias, buscamos la familia con un máximo de conversión al gaussiano cónico fundamental. (Apéndice III)

Explicación del comportamiento real

Idealmente, si tenemos una antena de este tipo, excitada por un modo de guía circular TE_{01} puro, lo que significa un haz gaussiano cónico de $\varpi_0=0.565a$ con una pureza del 96.7%, desearíamos a la salida un haz gaussiano con el mismo ϖ_0 pero con mayor pureza. En la práctica, vemos que el valor de ϖ_0 que optimiza la conversión va aumentando desde el valor inicial de $0.565a$ hasta llegar a los valores de la tabla 3.2. Junto con este cambio del valor de ϖ_0 , también se produce un ligero desplazamiento de la posición del ancho mínimo del haz.

Debido al desajuste inicial, el modo TE_{01} no se expande como un gaussiano, se puede entender la existencia de una desadaptación entre el coeficiente utilizado en la fórmula del perfil (3.12), que es fijo a lo largo de todo el componente, y el que realmente se está generando en el interior, que resulta ser variable. Sin embargo, en cada punto concreto del componente se cumple el principio básico de funcionamiento, es decir, la antena se abre de la misma manera que lo haría el haz gaussiano que tenemos en el interior. En otras palabras, el hecho de cambiar el valor de ϖ_0 y la posición de este a lo largo de la antena, lo podemos asimilar sin grandes dificultades a la forma concreta de la antena, que pese a tener un valor de ϖ_0 y una posición determinadas, podemos reproducir por tramos el mismo perfil cambiando ϖ_0 y la posición de este.

A modo de ejemplo ilustrativo, en la figura 3.9, tenemos representado un perfil definido con un $\varpi_0=0.565a$, $\varpi(z)$, siendo a el radio de entrada de la guía, junto con el haz generado con un nuevo valor de ϖ'_0 desplazado una distancia Δz del centro de fases original. Se observa que la nueva pendiente asintótica del nuevo modo gaussiano, $\varpi'(z-\Delta z)$, prácticamente coincide con la pendiente del modo gaussiano original, $\varpi(z)$, sin duda gracias al cambio del valor del ancho mínimo del haz y a su posición. En consecuencia, podemos decir, que en la parte final de la antena, se excita apropiadamente un nuevo modo gaussiano, $\varpi'(z-\Delta z)$.

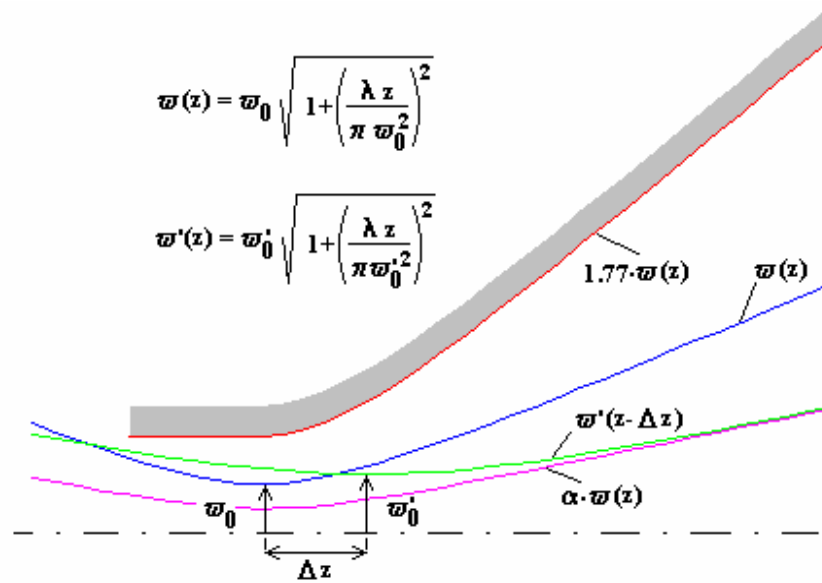


Figura 3.9: Representación de un perfil de antena adaptadora definida con $w_0=0.565a$ en $z=0$, comparado con el haz realmente excitado $w'(z-\Delta z)$, definido con w'_0 a una distancia Δz del origen.

En los cálculos realizados, se ha podido comprobar este fenómeno, es decir, a lo largo del componente el valor del w_0 y su posición varían de una manera controlada, hasta llegar un momento que se estabiliza, manteniendo el mismo haz a la salida.

Por ejemplo, para el caso concreto de una antena con perfil con $w_0=0.51a$, al ir aumentando la longitud de la antena de bocina, obtenemos los resultados presentados en la tabla 3.3.

Longitud	Eficiencia	w_0/R_{in}	Δz (mm.)
0	96,7	0,565	0
z_0	99,7	0,59	12,1
$1,5 z_0$	99,92	0,6	11,3
$2 z_0$	99,934	0,6	10,38
$2,5 z_0$	99,928	0,6	9,4
$3 z_0$	99,926	0,6	7,7
$3,5 z_0$	99,914	0,605	7,8

Tabla 3.3: Evolución de la eficiencia, valor de w_0 y la variación de posición con respecto al origen del modo cónico fundamental generado por la antena diseñada con el valor de $w_0=0.51a$, introduciendo un modo TE_{01} como excitación, para diferentes longitudes (normalizadas por el valor de z_0).

Se puede apreciar, como a partir de una longitud de aproximadamente z_0 , tenemos una eficiencia mayor del 99.5%, que se mantiene en valores semejantes durante un gran margen de longitudes del componente. Se puede apreciar incluso como también

el valor de ϖ_0 de la estructura gaussiana que se genera se estabiliza en un valor de 0.6 veces el radio de entrada, en un rango bastante importante de longitudes.

La consecuencia más directa de este estudio, es que no tenemos una longitud óptima de conversión, ya que la misma antena ajusta automáticamente las mezclas de modos de guía circular lisa que necesita con tal de conformar correctamente una estructura gaussiana.

Por otro lado, es precisamente la variación del ϖ_0 generado lo que hace posible aumentar la eficiencia, ya que al aumentar este valor disminuye la dispersión del haz generado y aumenta el sobredimensionamiento de los campos en el interior de la bocina, minimizando el efecto de la guía de ondas. Si se mantuviera un ϖ_0 constante a lo largo de la antena, estaríamos manteniendo constante el cociente entre la anchura del haz y el radio de la guía en cada punto de la antena, por lo que la eficiencia debería ser constante, ya que de alguna manera, siempre tenemos el mismo factor de sobredimensionamiento de los campos en el interior.

En principio, una estructura gaussiana tiene una anchura infinita, nosotros pretendemos representarla mediante una estructura de campo limitada a una zona del espacio. Esto implica que tenemos que cortar las colas del gaussiano a cierto nivel. Según el sobredimensionamiento de los campos en el interior con la guía de ondas, cortaremos a uno u otro nivel estas colas del gaussiano. Cuanto mayor sea este factor, menor será el error cometido al representar la estructura gaussiana mediante una función acotada al radio de la guía, y mayor podrá ser la eficiencia de conversión.

Resumiendo, podríamos decir, que tener esta zona de transición puede resultar beneficioso, desde el punto de vista de aumentar el sobredimensionamiento de los campos del interior de la guía de ondas con respecto a la propia guía, pagando el precio de tener que utilizar un valor de ϖ_0 en la fórmula diferente al deseado. Por otro lado, deberemos tener en cuenta, que pese a no tener una distancia óptima, tenemos que respetar una distancia mínima para tener un porcentaje aceptable de conversión. Para el caso concreto del modo TE_{01} de guía circular lisa, el tamaño mínimo aconsejable es aproximadamente la distancia de Rayleigh (z_0).

En principio, podríamos alargar el componente tanto como quisiéramos, y la eficiencia debería crecer de un manera constante. Esto no es del todo cierto, como se puede apreciar en los datos mostrados en la tabla 3.4. Esta caída del valor de la eficiencia se debe a que llega un momento en que pese a tener los campos muy

sobredimensionados con respecto a la estructura de la guía de ondas, esta sigue intentando fijar el valor instantáneo de ϖ_0 .

Es importante hacer notar una limitación importante de este tipo de componentes, dado un modo de excitación determinado (un valor efectivo de ϖ_0 inicial) y una frecuencia de trabajo fija, la forma de expansión de un gaussiano está totalmente determinada. Si intentamos forzar cualquier otro valor de ϖ_0 diferente del óptimo, pagaremos el precio de perder eficiencia. En el caso de excitar la bocina con un TE_{01} , este valor óptimo es 0.6 veces el valor del radio inicial.

Como ya hemos comentado, este tipo de antenas las podemos utilizar también con cualquier otro modo de excitación, y con cualquier tipo de guía de ondas. El tamaño de la zona de transición dependerá en cada caso del modo o mezcla de modos de entrada. Será tanto más grande cuanto menor sea la correlación de la entrada con el gaussiano que se pretende obtener.

Para el modo TE_{02} , la correlación con el modo gaussiano cónico de segundo orden es aproximadamente del 83%, por lo que la zona de transición en este caso será apreciablemente mayor que el caso del cónico fundamental.

Una manera fiable de cambiar los parámetros del haz que se genera puede ser añadir una transición (taper) del radio de la guía inicial como paso previo a la antena, o si se pretende utilizar el haz gaussiano de salida en una línea cuasi-óptica, cambiar los parámetros del haz diseñando los reflectores o las lentes adecuadamente.

Ejemplo de aplicación

A modo ilustrativo, vamos a estudiar una antena adaptadora “natural” con un coeficiente $\varpi_0=0.51a$, lo que nos generará un haz gaussiano cónico fundamental de $\varpi_0=0.6a$ de eficiencia óptima, tal y como lo presentamos en la tabla 3.2.

En este ejemplo trabajemos con una frecuencia del 50 GHz, con un radio de guía circular lisa de 19.75 mm., ya que con estos valores, aseguramos que cumplimos las condiciones de paraxialidad exigidas en el capítulo anterior. Realizaremos dos cortes de la antena a diferentes distancias, buscando las mezclas de modos TE_{0m} que conforman la salida de esta antena, y representaremos el patrón en campo lejano.

En la figura 3.10, tenemos representado el diagrama de radiación en campo lejano de la mezcla obtenida al cortar el componente a una distancia z_0 , la mitad de la

profundidad del haz, y el patrón obtenido con la mezcla al final del componente con una longitud doble de la anterior. Vemos que pese a tener, como es lógico, diferentes valores de los radios de salida, el diagrama de radiación de salida permanece prácticamente constante.

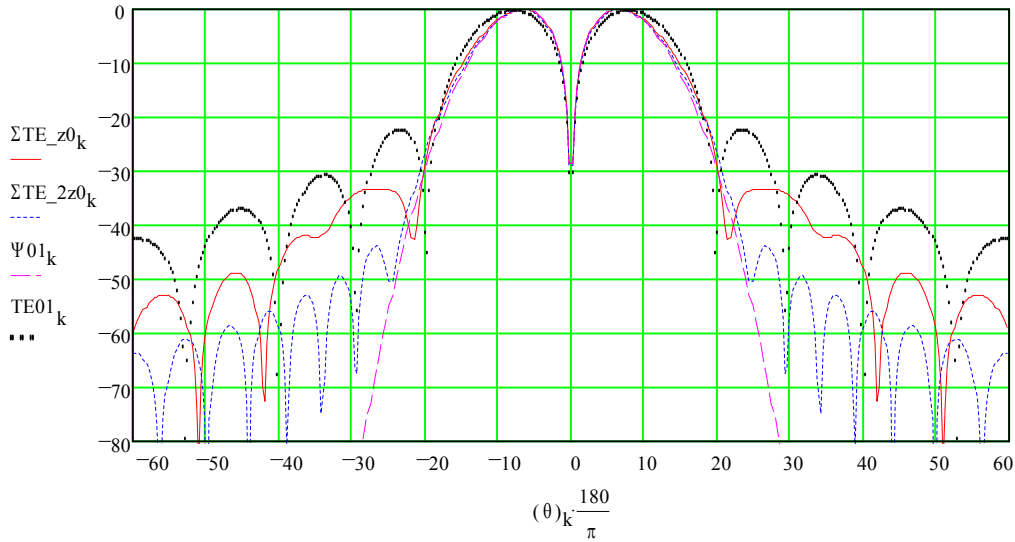


Figura 3.10: Diagrama de radiación de la mezcla de modos obtenidos en dos cortes a diferentes longitudes de la antena definida por la ecuación 3.12, tomando $r_{in}=19.75\text{mm}$. $\varpi_0=0.51*r_{in}$, junto con la representación del diagrama de radiación de un modo gaussiano cónico fundamental ideal con $\varpi_0=0.6a$ y el diagrama de radiación del modo TE_{01} de entrada.

Los radios de salida de los dos cortes representados, son 27.931mm. y 44.162mm., y las mezclas de modos correspondientes son evidentemente diferentes y las podemos encontrar en la figura 3.6, en las abscisas 2.356 y 3.726 respectivamente, ya que el valor de ϖ_0 en este caso es de 11.85mm. Se puede observar que pese a ser un radio casi el doble que el otro, el patrón de radiación no se estrecha, sino que permanece constante, señal inequívoca de que hemos generado una estructura gaussiana.

3.2.3.- Otras formas de antenas adaptadoras

Hemos visto el principio de funcionamiento de la antenas “naturales”, y también hemos visto, que para los casos, en que el modo de entrada no correla eficientemente con la estructura gaussiana deseada, tenemos unos desajustes que dan lugar a una zona de transición. Esta zona de transición, lo único que nos introduce es un cierto desajuste del valor introducido en la fórmula y el finalmente obtenido. Pero pese a ello, hemos visto que la idea básica de funcionamiento se sigue cumpliendo, ya que podemos entender que el valor de ϖ_0 , va cambiando a lo largo del componente, simplemente

asumiendo que cambia el sobredimensionamiento y la posición de los haces que van siendo excitados localmente.

Esta idea la podemos extrapolar, y nos daremos cuenta que pueden existir otros tipo de formas de antenas que bajo el mismo principio de funcionamiento, es decir, excitación local de valores diferentes de ϖ_0 , podemos llegar a estabilizar un modo gaussiano concreto.

La forma de los perfiles parabólicos, la podemos describir:

$$r(z) = r_0 \left(1 + \left(\frac{2z}{k\varpi_0^2} \right)^2 \right). \quad (3.13)$$

En estos casos, los valores de ϖ_0 empleados en la definición del perfil, al contrario que el caso anterior, serán mayores. Sin embargo, el valor de ϖ_0 óptimo será el mismo, ya que este depende únicamente del modo de entrada que sigue siendo el mismo.

En las referencias [Shapiro, 92; Vlasov, Comunicación privada] se utilizan perfiles parabólicos para la implementación de codo cuasi-ópticos. Estos perfiles se obtienen como fruto de un proceso de optimización para la obtención de un máximo de eficiencia a una longitud determinada.

Esta nueva forma de antena y la “natural” se parecen bastante al principio, justo en la zona donde realizamos la definición de la estructura gaussiana, y luego la parábola se abre más rápidamente, separándose del haz gaussiano, permitiendo sobredimensionar más aún los campos del interior (figura 3.11).

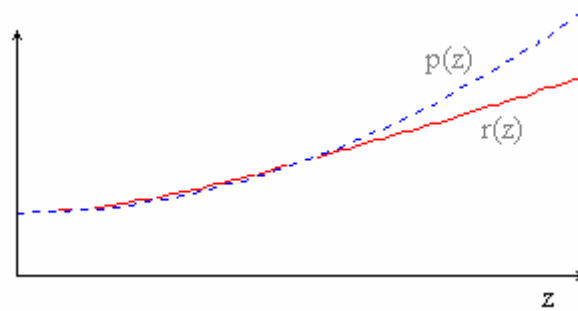


Figura 3.11: Comparación entre un perfil de antena “natural”, $r(z)$, y un perfil parabólico, $p(z)$, que obtienen el mismo haz gaussiano cónico fundamental, con un valor de $\varpi_0=0.6a$.

En la tabla 3.4, se presenta la relación entre los valores ϖ_0 utilizados en la fórmula de expansión y los finalmente obtenidos, en las mismas condiciones que la tabla

anterior, es decir, partiendo de un modo TE_{01} de guía circular lisa obtener un modo gaussiano cónico fundamental, Ψ_0 .

ϖ_0/R_{in} deseado	ϖ_0/R_{in} obtenido	Eficiencia (%)
0.6	0.59	99.835
0.64	0.595	99.97
0.65	0.6	99.975
0.66	0.6	99.98
0.67	0.6	99.977
0.68	0.605	99.97
0.7	0.61	99.955
0.75	0.625	99.938
0.85	0.685	99.85
0.95	0.775	99.55
1.1	0.915	99.45

Tabla 3.4: Valores deseados, utilizados en la fórmula (3.13), y los valores obtenidos como fruto de la simulación con sus respectivas eficiencias, utilizando una antena con perfil parabólico de longitud $1.5z_0$, el radio de entrada de 19.75 mm. y la frecuencia de trabajo de 30.3 GHz.

Se puede apreciar, que volvemos a tener el valor óptimo para un haz de salida con un parámetro $\varpi_0=0.6a$. En este caso se ha realizado un barrido de valores más extenso, viendo la posibilidad de excitar otros valores de ϖ_0 , pudiendo comprobar la relativa pérdida de eficiencia.

Este tipo de antena, funciona gracias a que en la parte inicial tiene gran parecido con la antena “natural”, y la explicación del funcionamiento es común. La ventaja de esta antena, es que una vez generado el haz gaussiano, la guía se separa gradualmente del haz, permitiendo una adaptación mejor, al tener un radio de salida mayor. Las eficiencias obtenidas son similares al caso de las antenas “naturales”, siendo en algunos casos incluso superiores. Por otro lado, el rango de longitudes para las que obtendremos grandes eficiencias será menor que en el caso de la antena “natural”, ya que al abrirse más rápidamente el haz se degenera más rápidamente.

Por ejemplo, para el caso concreto de una antena con perfil con $\varpi_0=0.66a$, al ir aumentando la longitud de la antena de bocina, obtenemos los resultados presentados en la tabla 3.5. También en la misma tabla, para hacer posible una comparación rápida entre los perfiles de antena “natural” y parabólica, se han incluido los datos correspondientes a la tabla 3.3, con los resultados de la antena “natural” con $\varpi_0=0.51a$.

	Antena “natural” ($\varpi_0=0.51a$)			Antena Parabólica ($\varpi_0=0.66a$)		
Longitud	Eficiencia	ϖ_0/R_{in}	Δz (mm.)	Eficiencia	ϖ_0/R_{in}	Δz (mm.)
0	96,7	0,565	0	96,7	0,565	0
1 z_0	99,7	0,59	12,1	-	-	-
1,2 z_0	-	-	-	99,992	0,6	12,8
1,5 z_0	99,92	0,6	11,3	99,98	0,6	12
1,8 z_0	-	-	-	99,95	0,6	10,9
2 z_0	99,934	0,6	10,38	99,94	0,6	10,2
2,2 z_0	-	-	-	99,88	0,6	9,5
2,5 z_0	99,928	0,6	9,4	-	-	-
3 z_0	99,926	0,6	7,7	-	-	-
3,5 z_0	99,914	0,605	7,8	-	-	-

Tabla 3.5: Comparación entre los resultados obtenidos con las antenas “natural” (3.12) y parabólica (3.13) óptimas.

Se puede observar, como pese a tener un valor máximo de eficiencia mayor la antena con perfil parabólico, la antena “natural” mantiene una eficiencia mayor del 99.9% en un rango bastante más grande que la antena parabólica.

3.3.- Conclusiones

En este capítulo se ha propuesto una familia de antenas de bocina para la obtención de estructuras gaussianas a partir de modos de guía. La forma “natural” presentada, realmente hace honor a su nombre, ya que viene definida por la manera en que se expandiría una estructura gaussiana, que es precisamente lo que queremos excitar.

Además, desde el punto de vista de impedancias, estas antenas de bocina “naturales” suponen una adaptación prácticamente óptima entre las estructuras de guía de ondas y el espacio libre.

En concreto, nos hemos centrado en los modos TE_{0m} de guía circular lisa. No obstante, como ya hemos comentado anteriormente, debido a la sencillez de la idea del diseño, es perfectamente aplicable a otros tipo de geometrías así como a otros modos de guía.

Al final de este capítulo, se ha estudiado la posibilidad de utilizar perfiles parabólicos. La principal desventaja de estos frente a los perfiles “naturales”, es que estos últimos mantienen la estructura gaussiana generada en una longitud mayor. Por contra, en algunos casos particulares se pueden alcanzar eficiencias ligeramente superiores, al tener un mayor factor de sobredimensionamiento de los campos.

Capítulo 4.- Consideraciones sobre el diseño de reflectores para modos gaussianos de orden superior.

En los capítulos anteriores, hemos presentado la formulación de varias familias de modos gaussianos de orden superior, soluciones de la ecuación de Helmholtz paraxial en el espacio libre. También hemos visto, como a partir de modos propios de guía de ondas, somos capaces de excitar modos del espacio libre bastante eficientemente.

En este capítulo, estudiaremos la posibilidad de guiar estos modos gaussianos de orden superior a través de una línea cuasi-óptica. El principio básico de funcionamiento de este tipo de líneas es la reproducción iterativa, mediante la utilización de reflectores o lentes adecuados, de los frentes de fase correspondientes a zonas de poca dispersión¹.

Para aplicaciones de media o alta potencia, vemos reducidas las posibilidades de utilizar componentes tipo lentes, ya que al tener que ser atravesados por la onda electromagnética podemos tener problemas de ruptura del dieléctrico quemando la propia lente, problemas de reflexiones, etc.

El hecho de incorporar los modos gaussianos de orden superior en los desarrollos teóricos actualmente conocidos, daría lugar a un desarrollo bastante extenso, pudiéndose considerar como una futura línea de trabajo. El objetivo será básicamente demostrar que los modos gaussianos de orden superior pueden ser también guiados mediante múltiples reflexiones en espejos, de la misma manera que el modo gaussiano fundamental.

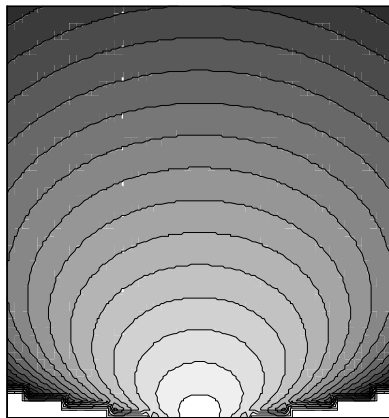
Hasta hoy en día, únicamente se ha utilizado el modo gaussiano fundamental para transportar potencia a través de una línea cuasi-óptica. Únicamente, existen varias referencias [Shapiro, 92; Vlasov, Comunicación privada], en las que se proponen para la

¹ Zona cercana a la posición de la cintura del haz o “beam waist”, en donde la dispersión es mínima y los frentes de fase son prácticamente planos.

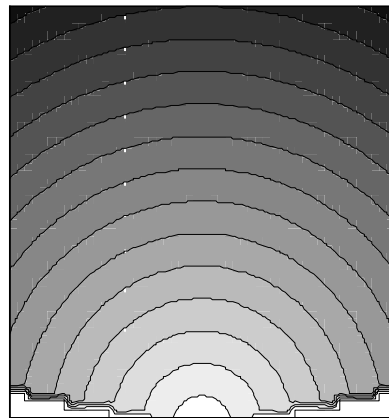
realización de codos en guía, soluciones cuasi-ópticas utilizando modos de orden superior.

Para el modo fundamental en concreto, por tener la potencia concentrada en la parte más próxima al eje de propagación, se puede asumir que los frentes de fase son esféricos. Como vimos en el capítulo 2 de este trabajo, los frentes de fase de las estructuras gaussianas son elipsoides. En la zona cercana al eje estas elipsoides se pueden aproximar por esferas sin cometer errores muy grandes.

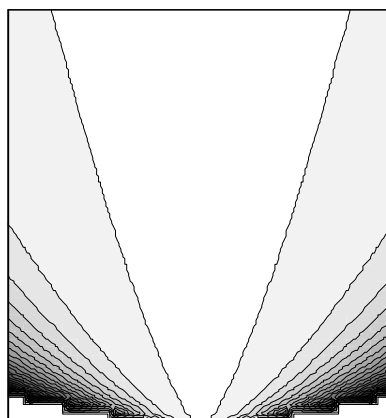
En la figura 4.1 tenemos representados las formas de los frentes de fase reales (elipsoidales) y la aproximación de frentes de fase esféricos. Podemos fácilmente apreciar como aumenta el error al desplazarnos hacia los extremos. Mientras trabajemos en la zona central, modos gaussianos con poca difracción, podremos dar por buena la aproximación. Gracias a esta suposición, los métodos de diseño de los reflectores se simplifican bastante.



F1



FE1



E1

Figura 4.1: Representación del error (E1) cometido al considerar frentes esféricos (FE1) en lugar de las formas reales de los frentes de fase (F1). (El blanco corresponde con el nivel mínimo, 0.1 %, y el negro con el máximo, 60 %)

En este capítulo estudiaremos la posibilidad de utilizar modos gaussianos de orden superior para transportar la potencia a través de una línea cuasi-óptica. Para estos modos, no tiene porque ser aplicable la aproximación anterior; el proceso de diseño de los reflectores se complica ligeramente en comparación con el diseño de los reflectores para el modo gaussiano fundamental. Para estos casos deberemos recurrir a métodos numéricos para obtener las formas óptimas de los reflectores.

4.1.- Líneas de transmisión cuasi-ópticas

Hemos visto que las estructuras gaussianas, son estructuras con una difracción controlada y unos frentes de fase con una forma muy bien definida. El tener una difracción controlada significa que tienden a dispersar la potencia aunque siempre dentro de cierto sector.

Si pretendemos recoger cierta potencia en un punto situado a una distancia d de la fuente o generador de señal, deberemos tener en cuenta que el radio de la antena receptora, caso de trabajar con el modo gaussiano fundamental y pretendemos recoger el 99% de la potencia total, tendrá que valer:

$$R = \frac{1.5\lambda}{\pi\varpi_0} d \quad (4.1)$$

donde λ es la longitud de onda de trabajo y ϖ_0 el valor del radio mínimo del haz gaussiano.

Si elegimos la longitud de onda del mismo orden que el valor de ϖ_0 , el radio de la antena receptora deberá ser casi la mitad de la distancia d .

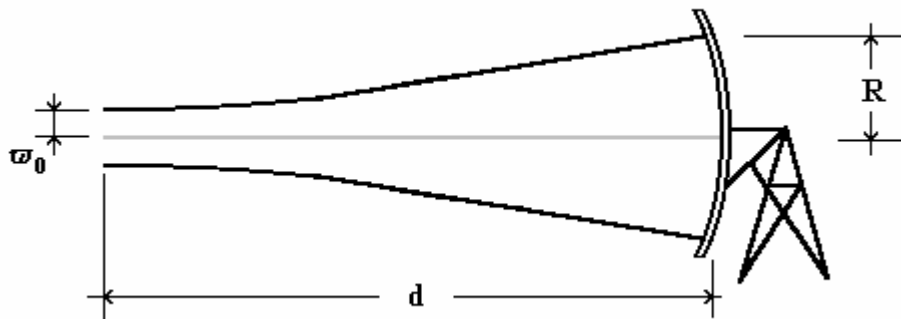


Figura 4.2: Esquema de propagación de una estructura gaussiana junto con antena de recogida de la energía.

Lógicamente, podremos elegir unos valores de ϖ_0 y λ adecuados para que la dispersión sea mínima, con tal de reducir al mínimo el tamaño del receptor necesario. En la mayoría de las aplicaciones no siempre será posible elegir la frecuencia de trabajo, por lo que únicamente podremos cambiar el valor de ϖ_0 para controlar la dispersión. Por desgracia, el parámetro ϖ_0 tampoco será fácilmente sintonizable, ya que vendrá muy ligado al sistema de generación de las ondas milimétricas.

En la gran mayoría de los casos, tendremos fijados los dos parámetros, sin grandes posibilidades de cambiarlos. Por lo tanto, nos veremos limitados en la distancia a recorrer por el tamaño de la antena receptora.

Con esta filosofía de funcionamiento, la utilización de estructuras gaussianas se reduciría a enlaces punto a punto, con el emisor y el receptor situados en línea recta, y a distancias determinadas por los tamaños de antena que estemos dispuestos a manejar.

Para evitar la limitación de que el emisor y el receptor tengan que estar en línea recta, podemos pensar en colocar un plano conductor perfecto que haga las veces de reflector, que nos permita doblar cierto ángulo. Por el hecho de ser un componente plano no variará el espectro angular de ondas planas que inciden sobre él y únicamente cambiará la dirección de propagación del haz gaussiano incidente, como se vió en el capítulo 2 de este trabajo.

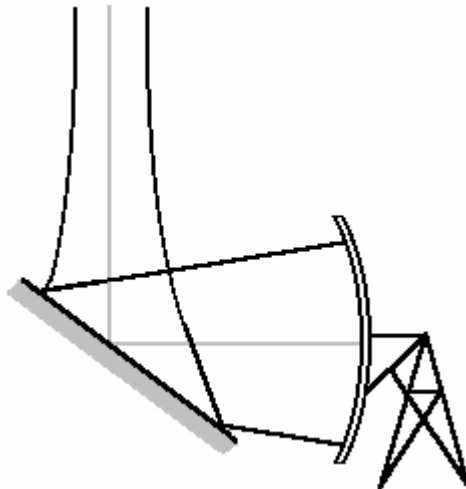


Figura 4.3: Reflexión de haz gaussiano en reflector plano para ser recogido por una antena.

En este caso, hemos conseguido solventar el problema de curvar el enlace, pero seguimos teniendo el problema del tamaño de la antena, ya que sigue estando igualmente ligado a la distancia a recorrer.

Ninguna de las soluciones presentadas nos ofrecen ninguna garantía para poder utilizar este tipo de “líneas de transmisión” de una manera eficiente para guiar energía, ya que no tenemos ningún control sobre la forma de propagación de la energía, con el problema añadido del tamaño de la antena receptora.

De la misma manera que hemos introducido un componente plano, transparente en cuanto al espectro angular, podemos utilizar otro tipo de componentes que modifiquen este espectro, intentando confinar la energía cerca del eje de propagación.

En la figura 4.4, tenemos representado un sistema de transmisión de energía basado en este tipo de componentes.

Si es posible construir los sistemas S1 y S2, tendremos el problema solventado, ya que podríamos controlar en todo momento tanto la dirección de propagación de energía, como la forma en que esta se expande.

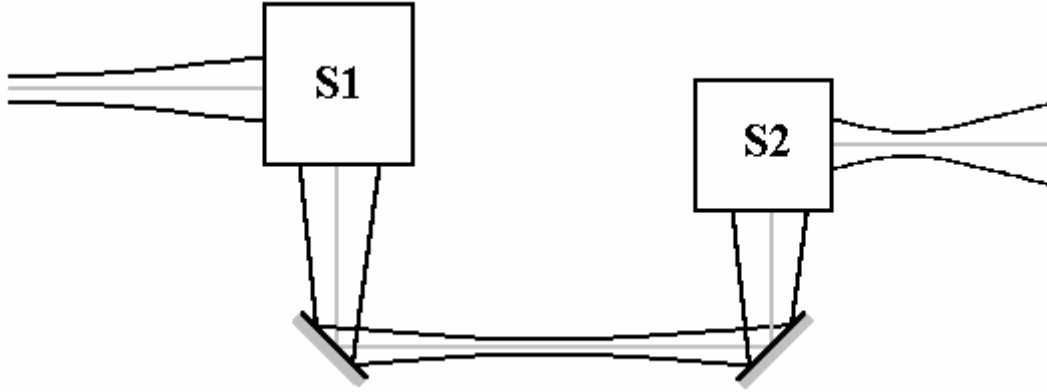


Figura 4.4: Esquema del funcionamiento de una línea de transmisión del tipo cuasi-óptica.

En esta línea de transmisión, actuando sobre los sistemas S1 y S2, podemos modificar el valor de ϖ_0 del haz que atraviesa el sistema, y así controlar perfectamente su dispersión.

Nuestro interés se centrará ahora en estudiar la posibilidad de diseñar adecuadamente los sistemas S1 y S2.

Método clásico

Este problema para el modo gaussiano fundamental está ya resuelto, bajo la suposición de frentes de fase esféricos, en las referencias [Stavroudis, 72; Goldsmith, 82; Saleh, 91] entre otras muchas. Básicamente, se trata de un problema de óptica clásico, en el que se utiliza la teoría de óptica geométrica bajo propagación gaussiana para analizar y diseñar este tipo de componentes.

Teniendo en cuenta que los frentes de fase se asumen esféricos con un radio de curvatura definido:

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{\pi \varpi_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right) \quad (4.2)$$

podemos decir que cada rayo, con dirección perpendicular a los frentes de fase, describe una trayectoria perfectamente recta y que todos estos rayos confluyen en un punto, llamado foco, situado a una distancia que corresponderá con el radio de curvatura de la esfera que define los frentes de fase (4.2).

Para generar como salida, fruto de una reflexión en una superficie reflectora, otro conjunto de haces que confluyan en otro foco, deberemos diseñar el reflector según una forma elipsoidal, definiendo los dos puntos focales del sistema, el original y el deseado como los dos puntos focales de la elipse. Sabemos que la longitud de cualquier camino que une los dos focos de una elipse pasando por un punto de la propia elipse es siempre constante. Desde el punto de vista de la óptica geométrica, suponiendo que estamos en un medio homogéneo, implica que todos los posibles caminos entre los dos focos de una elipse con una reflexión interna sobre ella, tienen la misma longitud de camino óptico (definida como el producto del índice de refracción del medio por la distancia recorrida [Saleh, 91]).

También se puede comprobar, como los rayos incidente y reflejado permanecen en el mismo plano y que los ángulos con respecto a la normal de la superficie de la elipse son iguales para cualquier camino, según las leyes de Snell [Saleh, 91].

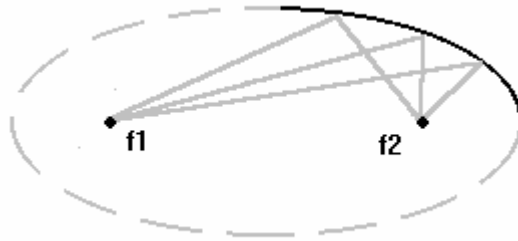


Figura 4.5: Diseño de reflector elíptico de focos f_1 y f_2 .

En el capítulo 2 de este trabajo, definimos la forma de expansión de las estructuras gaussianas, mediante la fórmula siguiente:

$$\varpi(z) = \varpi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \varpi_0^2} \right)^2} \quad (4.3)$$

siendo λ la longitud de onda y ϖ_0 el valor del radio mínimo del haz. Si nos alejamos lo suficiente como para que el término unitario constante sea despreciable frente al dependiente de z , llegaremos a la expresión de una recta,

$$\varpi(z) = \frac{\lambda}{\pi\varpi_0} z \quad (4.4)$$

que pasa por el origen de coordenadas, y coincide con la aproximación de óptica geométrica.

La ecuación 4.3, define la trayectoria de un nivel determinado de los campos. En el caso del modo gaussiano fundamental define un nivel que es $1/e$ veces menor que el valor de pico central. También podemos buscar las funciones que definen las trayectorias de otros niveles relativos, simplemente multiplicando por un determinado factor la ecuación 4.3. Esto repercute en la ecuación 4.4 cambiando la pendiente de la recta que sigue pasando por el origen de coordenadas.

En el caso de trabajar con modos de orden superior, la interpretación es exactamente la misma, únicamente que las asíntotas que encierran una cierta cantidad de potencia son de mayor pendiente conforme va aumentando el orden del modo.

El hecho de que todas las rectas pasen por el origen de coordenadas, demuestra la propiedad de las estructuras gaussianas de invarianza en la transformación a campo lejano.

A distancias suficientemente grandes ($z \gg z_0$), la teoría de propagación de haces o modos gaussianos coincide con la teoría de óptica geométrica (propagación de rayos).

Limitaciones del método clásico

Los modos gaussianos de orden superior tienen la potencia repartida en un sector mayor en relación al modo gaussiano fundamental, y esta dispersión aumenta con el orden del modo. Necesitaremos comprobar hasta que punto resulta conveniente seguir aplicando este método clásico para definir los reflectores o espejos, teniendo en cuenta que las nuevas características de distribución de potencia de los modos gaussianos de orden superior son más dispersivas que para el modo gaussiano fundamental.

Se puede comprobar de las fórmulas presentadas en el capítulo 2, y que aquí volvemos a presentar,

$$r^2 = \frac{2R(z)}{k} \left[2\pi q + (b + 2a + 1) \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) - kz \right] \quad (4.5)$$

que las formas de los frentes de fase para cualquier modo cuando $z \gg z_0$, son independientes del valor de la cintura de haz, ya que en ese caso tendríamos:

$$R(z) \approx z \quad y \quad \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) \approx \frac{\pi}{2} \quad (4.6)$$

por lo que la ecuación 4.5 nos quedará:

$$r^2 = \frac{2z}{k} \left[2\pi q + (b + 2a + 1) \frac{\pi}{2} - kz \right]. \quad (4.7)$$

Esto significa que dos modos con diferentes valores de ϖ_0 , tienen la misma forma de frentes de fase, sólo que los dos se expanden de manera diferente, es decir, tienen diferentes características de difracción.

Si observamos la representación del error cometido al suponer frentes de fase esféricos, figura 4.1, vemos que la aproximación es válida mientras nos mantengamos en la parte más cercana al eje, es decir, valores de ϖ_0 grandes para tener poca dispersión. Si por el contrario tenemos valores pequeños de ϖ_0 , al tener una dispersión mayor, puede suceder que salgamos rápidamente de la zona de convergencia, por lo que la aproximación de frentes esféricos dejaría de ser válida.

Debido a que las formas de los frentes de fase son, a largas distancias ($z \gg z_0$), prácticamente independientes del valor de cintura de haz, no resulta sencillo establecer un límite que defina la posibilidad de aplicación de la aproximación de asumir frentes esféricos. En general, en cada caso deberemos comprobar si la aproximación es o no aplicable.

Si decidimos no utilizar la teoría clásica, ya que la aproximación no es aplicable, para diseñar los reflectores deberemos tener en cuenta las formas reales de los frentes de fase de los campos incidentes y de los deseados como reflexión en el componente.

Es de esperar que, por tener igualmente los frentes de fase bien definidos y tener una difracción controlada, los sistemas S1 y S2 de la figura 4.4, puedan ser realizables para aplicaciones en las que la teoría clásica no sea válida. Así podremos diseñar líneas de transmisión basadas en concatenar sistemas del tipo de S1 y S2, para conseguir guiar la potencia desde el generador hasta el punto final donde debe ser aplicada.

Un sistema de transmisión de este tipo, resulta ser mucho más flexible que los basados en guías de ondas convencionales, además de ser capaces de manejar una mayor cantidad de potencia debido a que el peligro de que se rompa el dieléctrico (el aire) es menor, teniendo en cuenta además que la densidad de potencia puede ser fácilmente vigilada, controlando el valor de ϖ_0 . Sin embargo, no son estas las principales ventajas de las guías de onda cuasi-óptica. La mayor ventaja, es el filtrado longitudinal que

tienen de manera intrínseca los sistemas cuasi-ópticos, que impide que cualquier estructura de campos que no focalice correctamente en los focos prefijados en la etapa de diseño sea correctamente guiada.

El principal problema de estas líneas abiertas es precisamente el hecho de ser abiertas, ya que por razones de seguridad del personal que trabaje cerca de la línea se deberá apantallar todo el recorrido, o bien situar la línea en zonas no transitadas.

4.2.- Diseño de reflectores

La filosofía de funcionamiento de este tipo de guías de ondas está basada en la repetición iterativa de los frentes de fase correspondientes a una menor dispersión de la estructura gaussiana que viaja a través de la línea, como ya hemos comentado anteriormente.

En este punto nos centraremos en intentar diseñar los componentes, en nuestro caso, reflectores con tal de poder controlar la dispersión, y conseguir un guiado eficiente de la energía mediante reflexiones múltiples.

Desde el punto de vista de la teoría óptica gaussiana clásica, suponiendo frentes de fase esféricos, el problema queda solucionado con un reflector en forma elipsoidal como ya hemos comentado anteriormente. Es de esperar, que teniendo en cuenta las formas reales de los frentes de fase, exista una solución física al problema.

Cualquier intento de desarrollo matemático del problema puede resultar bastante farragoso, debido a la complicación de las funciones que definen las formas de los frentes de fase. Por ello, en este trabajo, hemos optado por una resolución numérica del problema de diseño de los reflectores.

En primer lugar estudiaremos las posibilidades de diseño de un solo reflector sobre el que incide una estructura gaussiana, haz incidente, y tenemos determinada la forma de la estructura gaussiana fruto de la reflexión que deseamos. Los haces incidente y deseado se especifican mediante el valor de cintura, “beam waist”, y la posición de este. Para definir el reflector necesitaremos conocer el ángulo que forman los ejes de los haces incidente y deseado (figura 4.6).

Cada uno de los puntos de la superficie del espejo deberá cumplir las condiciones:

- **relativa a la fase**, la suma de las fases de los haces incidente y deseado, debe permanecer constante. Esto resulta totalmente equivalente a imponer la ley de Snell, y supone un gran alivio al atacar el problema del diseño de espejos numéricamente.

Los vectores normales a una superficie de fase constante, S , definida como la combinación instantánea de las fases de los haces incidente y reflejado, y los vectores normales a las superficies de fase constante de cada

haz en particular, cumplen, en cada punto de la superficie S , la ley de Snell. Siempre se cumple que el vector normal a S , coincide con la bisectriz de los vectores normales de las superficies de los haces incidente y deseado. En medios homogéneos, como es el caso, basta con cumplir que los ángulos incidente y reflejado con respecto a la normal sean iguales para cumplir la ley de Snell.

Utilizando el método de búsqueda de la superficie de fase constante de la composición de los dos haces de entrada y salida, simplificamos el problema además de independizarlo de la forma complicada o no, de los frentes de fase.

- *relativa al módulo*, cada punto del reflector, según el haz incidente, tiene un ángulo determinado, lo que significa cierto nivel de potencia relativa; este nivel deberá coincidir con el determinado por el haz deseado.

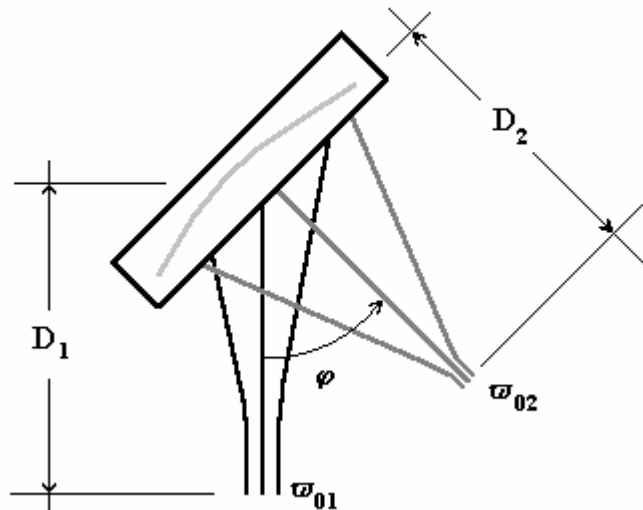


Figura 4.6: Variables que intervienen en el diseño de un reflector.

Desgraciadamente, en una gran mayoría de casos, estas dos condiciones no se cumplen simultáneamente, y dan lugar a dos reflectores diferentes. Si utilizamos el definido según la condición de fase, estaremos distorsionando el haz de salida en módulo, y viceversa.

En la figura 4.7, tenemos representados los espejos obtenidos numéricamente para cumplir la condición de fase y la del módulo, para el caso de colocar el mismo valor y posición de los haces incidente y reflejado formando un ángulo recto.

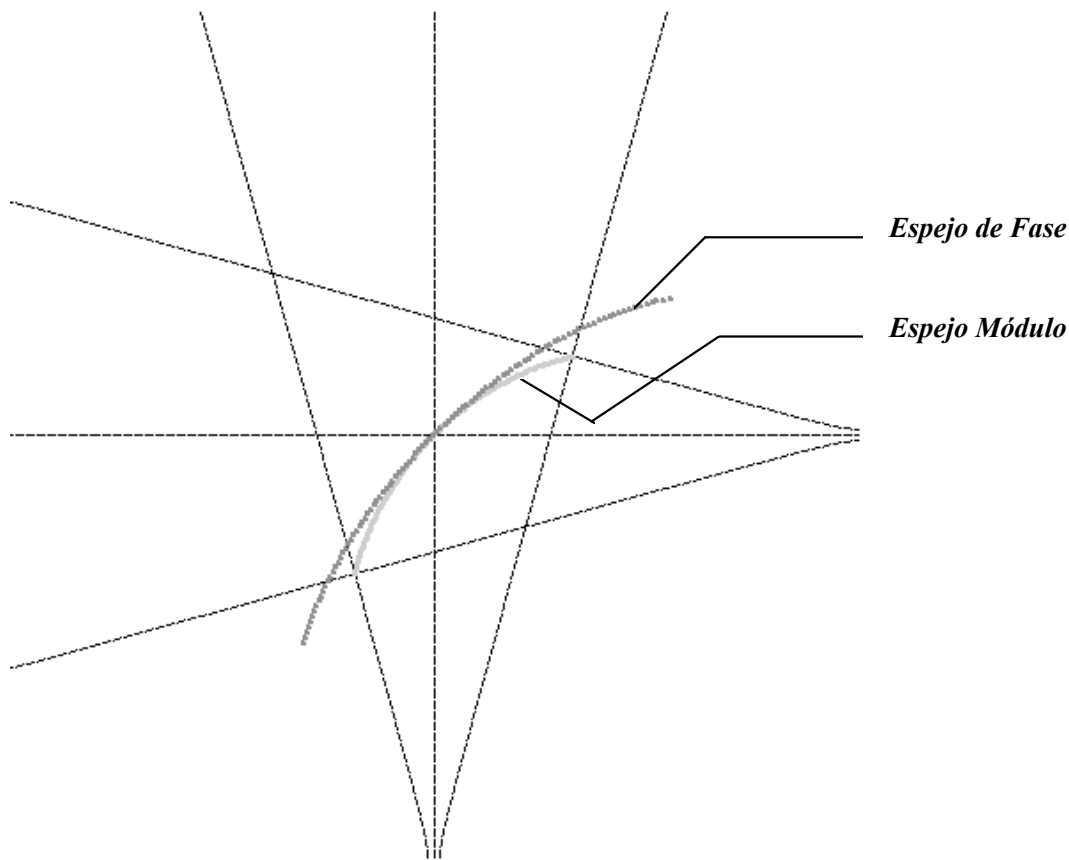


Figura 4.7: Representación de los reflectores obtenidos utilizando la condición de fase (oscuro) y la condición del módulo (claro), para el caso de un codo cuasi-óptico de 90 grados intentando reproducir el mismo haz incidente.

Lógicamente nos tendremos que decidir por uno u otro, o incluso por uno intermedio, pero en cualquier caso podremos asegurar que se genera una distorsión en el haz reflejado, ya sea en amplitud, en fase o en ambas.

Sin embargo, podemos decir que existirán unos valores para los parámetros de diseño, D_1 , D_2 , ϖ_{01} , ϖ_{02} y φ , tales que minimicen la distorsión. Esta será menor en la parte central del reflector e irá aumentando según nos acercamos a los extremos. Esta característica favorece a los sistemas que utilizan el modo gaussiano fundamental como medio de transporte de la energía, ya que este tiene precisamente la potencia concentrada en esta zona central. En sistemas que utilicen modos de orden superior las distorsiones originadas por el mismo reflector serán lógicamente mayores.

En cualquier caso, este problema de distorsión será un problema intrínseco al mismo reflector [Murphy, 87], que únicamente podrá ser completamente corregido añadiendo un segundo reflector, en una posición que intente compensar las distorsiones generadas por el primero.

4.3.- Análisis de reflectores

En este apartado se presentan básicamente dos métodos de análisis de reflectores, con los que se pretende evaluar la validez o no de los métodos de diseño propuestos en el apartado anterior.

4.3.1.- Utilizando la teoría de óptica de rayos

En primer lugar se presenta un método muy sencillo e intuitivo basado en el trazado de rayos, que intentar descubrir los puntos focales de la reflexión generada por el reflector como consecuencia de cierta excitación. Como se verá, es un método muy poco preciso y realmente no nos ofrece mucha información útil. Este sería un método sencillo y rápido para descartar ciertas opciones de perfiles para reflectores, ya que permite ver muy rápidamente si más o menos se consiguen los objetivos que se piden al haz reflejado.

Partimos de la base de que conocemos perfectamente la expansión de las estructuras gaussianas, ya que disponemos de las expresiones exactas de propagación, por lo que podemos calcular fácilmente el ángulo de incidencia del vector de campo incidente en cada punto del espejo. Conociendo ese ángulo de incidencia, así como el ángulo normal a la superficie, podemos determinar, aplicando la ley de Snell, el ángulo de salida del reflector. Es a partir de aquí cuando suponemos un comportamiento de óptica de rayos al campo generado por la reflexión en el reflector.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, y la primera ley de Snell, que dice que tanto el rayo incidente como el reflejado están en un mismo plano, podemos simplificar un análisis de tres dimensiones a uno de dos. Si trabajamos con espejos elipsoidales o esféricos, únicamente existirá un plano en que la representación del reflector sea común al haz de entrada y al de salida. En concreto este plano es el que contiene los ejes de los haces incidente y reflejado.

En nuestro caso, a modo de ejemplo, vamos a analizar los reflectores presentados en la figura 4.7, que como se ve el haz incidente y el reflejado forman un ángulo recto. En este caso concreto, al tratarse de un reflector elíptico, con este método únicamente

podremos trabajar, bajo la simplificación de dos dimensiones, con el plano representado, que contiene los ejes de los haces incidente y reflejado.

Si analizamos el reflector definido según el criterio del módulo, podremos ver rápidamente que no cumple la ley de Snell, ya que en lugar de concentrar los rayos en un punto, los dispersa en todas direcciones, figura 4.8.

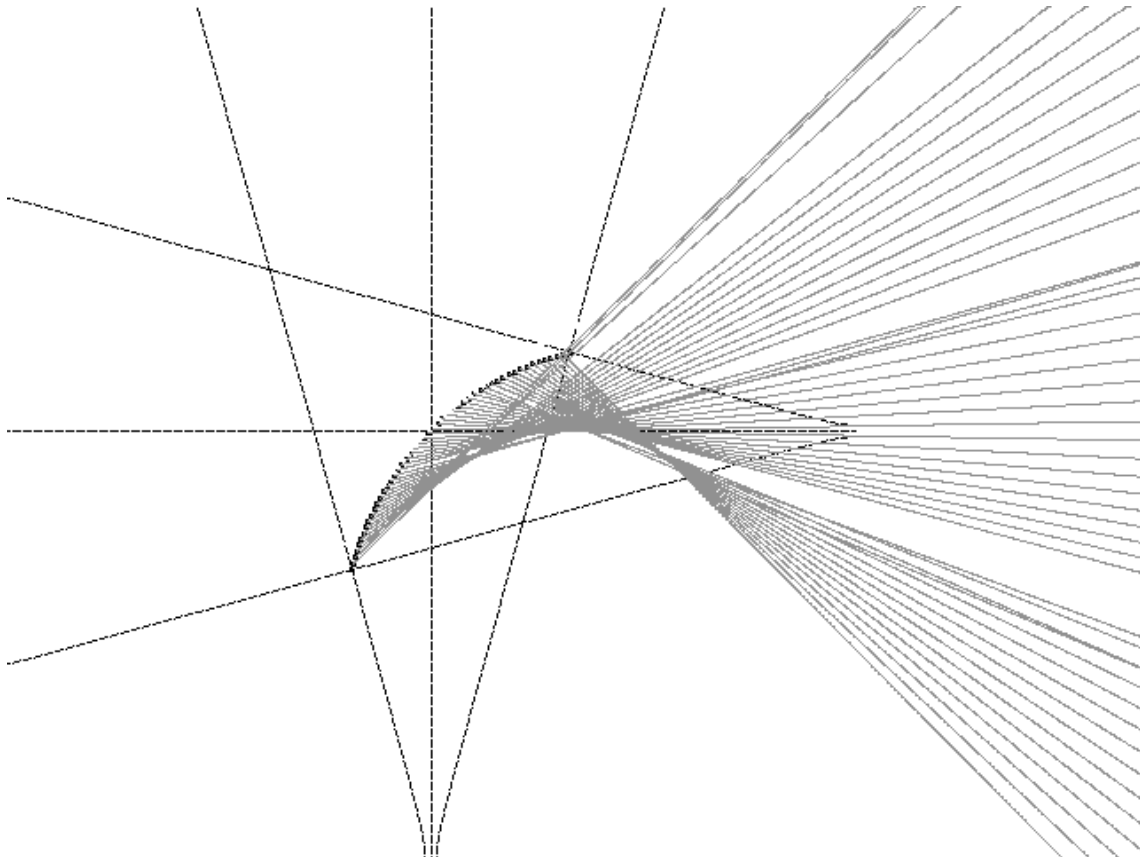


Figura 4.8: Análisis mediante el método de rayos de la reflexión en el reflector calculado según el criterio del módulo.

En vista de estos resultados, podemos descartar para posteriores estudios más refinados este método de definición de reflectores, ya que el resultado puede llegar a ser bastante caótico.

Si, en cambio, analizamos la superficie obtenida de la condición de fase, podemos ver como conseguimos cierta convergencia de los rayos de salida hacia un punto, figura 4.9. No obstante, al mismo tiempo que vemos una convergencia substancialmente mayor, vemos también que todos los rayos no confluyen en un solo punto, sino que generan algún tipo de zona cáustica, y que además hay ciertas zonas sin rayos trazados. Esto no significa que tengamos un nulo de radiación en esa dirección, simplemente que el método no es del todo preciso.

En este caso, la dirección del vector normal a la superficie se obtiene a partir de una aproximación numérica al valor de la derivada, tomando los valores de los puntos vecinos. Si incrementáramos el número de puntos del espejo podríamos apreciar como se produce una mejora de la convergencia de los rayos. Sin embargo, pese a afinar el método tanto como queramos, los resultados no dejarán de ser orientativos.

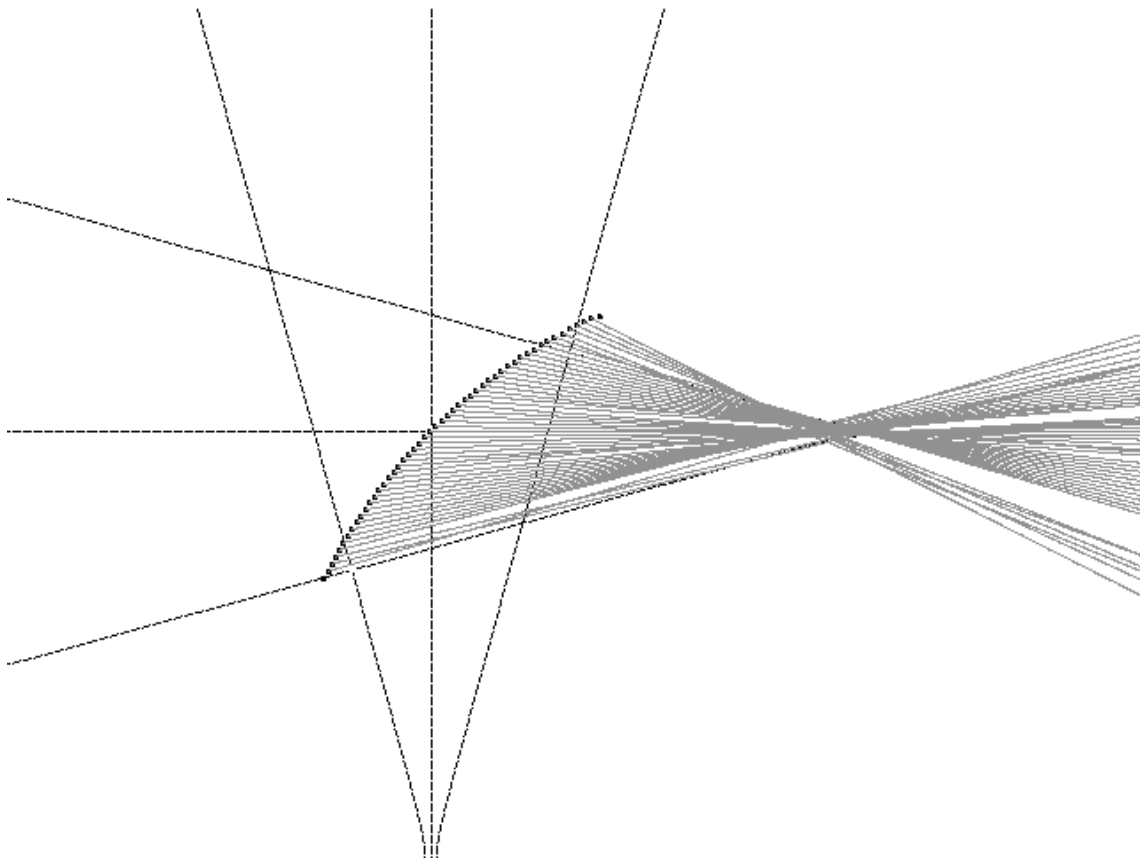


Figura 4.9: Análisis mediante el método de rayos de la reflexión en el reflector calculado según el criterio de fase.

Como resultado más relevante, podemos apreciar cierta asimetría en la radiación, como fruto posiblemente de la distorsión producida por el mismo reflector.

Como ya hemos comentado con este método simplificado a un plano, únicamente es posible estudiar de una manera pseudo-rigurosa el plano que contiene los ejes de los haces incidente y reflejado. Cualquier otro plano que se pudiera definir mediante el haz incidente, el corte de dicho plano con el reflector no resulta ser un plano, sino una superficie curvada. Para poder estudiar los espejos en cualquier otro plano, deberemos migrar hacia un método en tres dimensiones.

Resumiendo, este método de análisis de reflectores únicamente sirve para descartar los diseños más caóticos, ya que se trata de un método bastante aproximado, con una lectura subjetiva en un gráfico como método para obtener los resultados. No obstante se pueden intuir ciertos comportamientos que posteriormente se pueden estudiar con detalle utilizando otro tipo de análisis mucho más fino, basado en el cálculo de las corrientes generadas sobre la superficie del reflector por el haz incidente, y posteriormente calcular la radiación de esa distribución de corriente.

4.3.2.- Radiación de corrientes inducidas en el reflector: Huygens.

Este será un método que nos permitirá determinar sin demasiado error los campos radiados por las corrientes generadas en la superficie del espejo como consecuencia de la excitación mediante una estructura gaussiana.

Normalmente los reflectores pueden ser de varios tipos, según los radio de curvatura de los ejes o planos principales²:

- planos: radios de curvatura de los ejes principales³ infinitos, permiten cambiar la dirección de propagación pero sin variar el espectro de ondas planas incidente.
- cilíndricos: un eje principal con radio de curvatura infinito y otro finito, permiten cambiar la dirección de propagación, sin variar el espectro de ondas planas en el plano de radio de curvatura infinito.
- esféricos o elipsoidales: tienen los radio de curvatura de los planos principales acotados a un mismo valor (esférico) o a un valor diferente (elipsoidal), permiten variar el espectro en los dos planos simultáneamente.

Si, en el estudio de una línea de transmisión cuasi-óptica, elegimos todos los planos o ejes principales de los espejos coincidentes, aunque sea con una rotación de 90 grados de un reflector a otro, esto nos permitirá estudiar de manera separada los dos planos principales a lo largo de la línea, independizando totalmente los estudios de los dos planos. Son varios los autores que utilizan esta técnica para el estudio y diseño de una línea cuasi-óptica, suponen comportamiento independientes a dos planos

² Ejes principales de una superficie serán dos ejes ortogonales entre si, que caracterizan totalmente una superficie. Una superficie cualquiera la podremos definir indicando dos valores de radio de curvatura, asociados a cada punto del espejo, expresados en la base formada por los dos ejes principales.

perpendiculares, que van a coincidir con los planos en los que la línea se doblará [Sorolla, 95].

Por esa misma razón, los reflectores más utilizados son los cilíndricos, debido a que en parte son muy sencillos de construir, y debido a que es también sencillo realizar un estudio medianamente riguroso. Podemos hacer un estudio en dos dimensiones del reflector bastante completo, trabajando con el plano principal de radio de curvatura finito. En el plano principal con radio de curvatura infinito no se modifica el espectro angular de entrada. Si se desea una focalización en los dos planos principales, basta con colocar dos espejos cilíndricos, cada uno de ellos para focalizar un plano principal.

Con el método presentado en este apartado, se pueden analizar cualquier tipo de reflector, ya que los principios en los que está basado son absolutamente generales y no ligados a la geometría particular del problema.

Básicamente, el método consiste en el cálculo de las corrientes superficiales generadas sobre el reflector, como consecuencia de ser iluminado por cierta distribución de campo, y la posterior integración de estas corrientes, para obtener los campos radiados por ellas.

Como hemos visto, el campo eléctrico de una estructura gaussiana como las que estamos manejando, lo podemos expresar utilizando únicamente la componente angular E_ϕ . A partir de estas expresiones, podemos calcular el campo magnético de la estructura gaussiana mediante la relación:

$$\vec{H}(r, \phi, z) \propto \vec{n} \times E_\phi(r, \phi, z) \hat{\phi} \quad (4.8)$$

siendo \vec{n} un vector unitario con la dirección y sentido de propagación. Una propiedad básica de este vector, es su perpendicularidad con los frentes de fase constante. Debido a esto, el vector \vec{n} se obtiene mediante el cálculo del gradiente de la función de fase de la estructura gaussiana,

$$\vec{n} = \nabla \left\{ \text{Fase}(\vec{E}(r, \phi, z)) \right\} = \left\{ \frac{\partial \text{Fase}(\vec{E}(r, \phi, z))}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \text{Fase}(\vec{E}(r, \phi, z))}{\partial \phi}, \frac{\partial \text{Fase}(\vec{E}(r, \phi, z))}{\partial z} \right\} \quad (4.9)$$

donde la fase del campo eléctrico, para el caso de una estructura gaussiana de índices a y b , está definida como:

$$\text{Fase}(\vec{E}(r, \phi, z)) = \frac{r^2 k}{2R(z)} + (b + 2a + 1) \text{tg}^{-1} \left(\frac{2z}{k\varpi_0^2} \right) - kz. \quad (4.10)$$

³ Cualquier pareja de ejes que escojamos como principales tienen el radio de curvatura infinito.

Como se puede observar, no existe dependencia con el ángulo ϕ , por lo que la derivada con respecto al ángulo será nula. El vector \vec{n} resultante siempre estará en el plano r - z . En la figura 4.10, está representado el sistema de coordenadas elegido, así como los vectores de campo eléctrico (hacia fuera del papel), el gradiente de la fase (definido en el plano r - z) y el campo magnético resultante (también definido en el plano r - z). Se puede comprobar como al multiplicar los vectores de campo eléctrico y magnético se obtiene un vector en la dirección de propagación (\vec{n}).

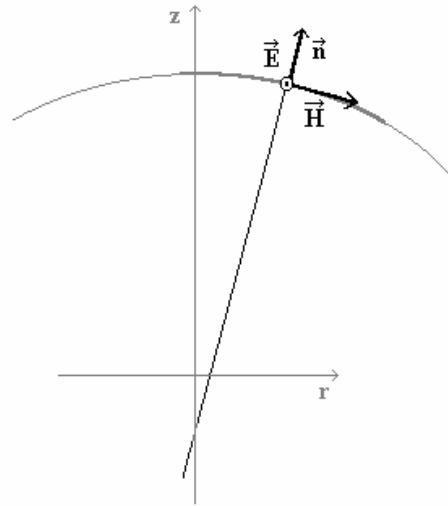


Figura 4.10: Representación de los vectores de campo eléctrico y magnético sobre un frente de fase constante, en el plano r - z .

También en la figura 4.10 se puede observar que el origen de fases ($z=0$) no coincide con la intersección de la recta perpendicular al frente fase. Esto es indicativo de que los frentes de fase pueden no ser esféricos, intentando hacer un desarrollo lo más general posible, e incorporar las expresiones reales de los frentes de fase de los diferentes modos gaussianos.

De esta manera, somos capaces de calcular, sobre toda la superficie del espejo, el campo eléctrico y magnético generado como consecuencia de una iluminación gaussiana.

Las expresiones de los campos radiados por una determinada región del espacio, delimitada por una superficie S , donde se conocen los campos eléctrica, \vec{E} , y magnético, \vec{H} , sobre dicha superficie, son las siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{rad}(r) &= \iint_S -jkz(\hat{n}_S \times \vec{H}) \cdot \vec{G} + (\hat{n}_S \times \vec{E}) \times \nabla' G + (\hat{n}_S \cdot \vec{E}) \cdot \nabla' G \, dS \\ \vec{H}_{rad}(r) &= \iint_S -j\omega\epsilon(\hat{n}_S \times \vec{E}) \cdot \vec{G} + (\hat{n}_S \times \vec{H}) \times \nabla' G + (\hat{n}_S \cdot \vec{H}) \cdot \nabla' G \, dS\end{aligned}\tag{4.11}$$

donde \hat{n}_S es un vector unitario perpendicular a la superficie S , y G son las funciones de Green en el espacio libre, definidas como:

$$G(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-jk r} . \quad (4.12)$$

Si estamos trabajando con superficies conductoras, podremos asegurar que las componentes tangenciales del campo eléctrico sobre la superficie serán nulas, por lo que el vector de campo eléctrico, \vec{E} , tendrá la misma dirección que el vector unitario normal a la superficie, \hat{n}_S , por lo tanto,

$$\vec{n}_S \times \vec{E} = 0 . \quad (4.13)$$

Además, las componentes normales del campo magnético también serán nulas, por lo que el vector del campo magnético, \vec{H} , será perpendicular al vector unitario, \hat{n}_S , de tal manera que

$$\hat{n}_S \cdot \vec{H} = 0 . \quad (4.14)$$

De esta manera, las ecuaciones anteriores de los campos radiados (4.11), las podemos simplificar en el caso de superficies conductoras a las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rad}(r) &= \iint_S -jkz(\hat{n}_S \times \vec{H}) \cdot G + (\hat{n}_S \cdot \vec{E}) \cdot \nabla' G \, dS \\ \vec{H}_{rad}(r) &= \iint_S (\hat{n}_S \cdot \vec{H}) \cdot \nabla' G \, dS \end{aligned} . \quad (4.15)$$

Podemos observar, como para el cálculo del campo eléctrico radiado necesitamos conocer las expresiones de los campos eléctrico y magnético de entrada. Sin embargo, para calcular el campo magnético, únicamente necesitamos conocer el campo magnético incidente.

Será suficiente con utilizar la ecuación del campo magnético para analizar una cadena de reflectores, ya que en todo momento podemos calcular el campo eléctrico asociado.

En resumen, el método de análisis propuesto, requiere en un primer momento un cálculo del campo magnético sobre la superficie del primer reflector. A partir de esa distribución de campos, utilizando únicamente el vector del campo magnético, podemos determinar el campo magnético sobre la superficie del siguiente reflector resolviendo la integral anterior (4.15). Esta distribución sirve a su vez de campo incidente para el siguiente reflector, etc.

4.4.- Consideraciones finales

Resumiendo, en este capítulo hemos demostrado que es posible guiar modos gaussianos de orden superior, mediante reflexiones múltiples en superficies conductoras, debido a que tienen unas formas muy bien definidas de los frentes de fase. No obstante, en muchos casos, los mismos reflectores diseñados para guiar el modo gaussiano fundamental, serán absolutamente válidos para guiar modos gaussianos de orden superior, siempre y cuando la dispersión de la potencia se mantenga dentro de unos márgenes.

Se ha presentado un método numérico para el diseño de reflectores, basado en la composición directa de los valores de fase en cada punto del espacio correspondientes a al haz incidente y al deseado como fruto de la reflexión. Como consecuencia de este proceso, se obtendrán diferentes superficies equifase que pueden corresponder con diferentes superficies de reflectores, situados en diferentes posiciones. Siempre podremos identificar la superficies de fase que nos interesa, ya sea conociendo la distancia a la que queremos colocar el reflector, o conociendo el desfase del camino directo entre los dos focos del sistema.

También se han presentado dos métodos de análisis de reflectores. Un primero bastante sencillo, para realizar estudios muy simples y poder descartar los diseños más caóticos sin necesidad de utilizar un método más complicado. Y un método de análisis bastante más completo y general, que permite el estudio de cualquier tipo de reflector, al tratarse de un método tridimensional, basado en la integración de las corrientes superficiales equivalentes generadas sobre el reflector bajo estudio.

Cualquiera de los dos métodos presentados, para aplicarlos a la síntesis de reflectores, deberemos incorporarlos dentro de un método iterativo, en el que conocidas la entrada y salida deseada del sistema, permitan variar las superficies de los reflectores, con el fin de minimizar las diferencias entre el haz de salida del sistema y el deseado.

Una buena aproximación inicial para la forma de los reflectores en este proceso iterativo, es sin duda, las superficies obtenidas bajo las suposiciones de óptica gaussiana clásica, en donde suponemos que los frentes de fase son esféricos.

A la hora de hacer las sucesivas modificaciones en las superficies de los reflectores durante el proceso iterativo, se deberán tener en cuenta los errores de una

manera local; ya que por ejemplo, en la parte central (cerca del eje de propagación), al poderse considerar los frentes de fase esféricos, los errores serán mucho menores que los generados en las zonas más alejadas del eje.

Capítulo 5.- Aplicaciones.

En este capítulo se presentan algunas de las posibles aplicaciones de las ideas y diseños originales de este trabajo.

Debido a la bondad de los resultados obtenidos, y a la sencillez de diseño y funcionamiento, son muchas las posibles aplicaciones de las antenas propuestas en el capítulo 3.

Como ya se comenta en este capítulo, el principio de funcionamiento es absolutamente general, y aplicable a otras estructuras de guías de onda (guías de onda con o sin corrugaciones con secciones rectangulares, cuadradas, elipsoidales o circulares), e incluso aplicable a otros modos del espacio libre (ya sean otros modos de la familia de Gauss-Laguerre, Gauss-Hermite, o cualquier otra familia de soluciones del espacio libre que se pudiera elegir).

Esto nos va a permitir ampliar la utilización de estas antenas a sistemas que trabajen, por ejemplo, con el modo gaussiano fundamental. Lo haremos aplicando los mismos conceptos, pero ahora trabajando con guía de onda circular corrugada. En este caso concreto, el modo de guía de onda requerido en la entrada sería el modo HE_{11} de guía circular corrugada, que pese a ser en la mayoría de los casos suficiente, puede ser mejorado ostensiblemente en cuanto al parecido con una estructura gaussiana.

Gracias a esta generalización, el abanico de posibles aplicaciones se amplía muy ostensiblemente, ya que podemos utilizar este tipo de antenas, desde en aplicaciones de sistemas ECRH (*Electron Cyclotron Resonance Heating*) para calentamiento de plasmas, sistemas de sinterización de cerámicas [Gaponov-Grekhov, 94], hasta como bocinas alimentadoras de antenas parabólicas para comunicaciones vía satélite o enlaces terrestres [Lamb, 86; Murphy, 88].

En este capítulo nos vamos a centrar en la generación y transporte de modos gaussianos de orden superior para un sistema de sinterización de cerámicas, basado en

un gyrotrón tecnológico de media potencia trabajando a 30GHz., que lanza un modo TE_{02} de guía circular lisa como salida. Para esta aplicación en concreto, los requerimientos de calentamiento de las piezas cerámicas, son de una distribución de campo lo más uniforme posible, con tal de que el calentamiento o secado sea uniforme. Mediante esta técnica, se evitan en el proceso de secado gradientes de temperatura, que darían lugar a grietas con riesgo de fractura de la pieza [Gaponov-Grekhov, 94].

Para obtener la uniformidad del campo requerida en la cavidad final que actuará de horno de secado, se introduce una pieza metálica de forma irregular que se hace girar durante todo el proceso de secado. Debido a esto, en interior de la cavidad se generan, de manera aleatoria, una gran cantidad de modos de orden superior, con variaciones de campo del orden de la longitud de onda, que es mucho menor que el propio objeto que se quiere secar.

Como consecuencia de este tratamiento de la potencia en la cavidad final, la forma en que la potencia llegue a esta, no tiene ninguna importancia. Es precisamente este hecho, después de lo visto en los capítulos anteriores, el que nos permite utilizar un modo gaussiano de orden superior para transportar la potencia desde el generador de microondas hasta la cavidad final. Además, la salida del generador de microondas utilizado, tiene un gran parecido con un modo gaussiano de orden superior solución del espacio libre paraxial, el modo gaussiano cónico Ψ_1 .

El sistema obtenido resulta mucho más sencillo, que el utilizado hasta ahora, en el que se empleaba el modo gaussiano fundamental como medio de transporte de la potencia a través de la línea de transmisión cuasi-óptica, generado utilizando un convertidor de Vlasov [Vlasov, 74] a partir del modo de salida del gyrotrón tecnológico utilizado (TE_{02}). Hasta ahora, no se había planteado la posibilidad de utilizar modos gaussianos de orden superior para transportar potencia a través de una guía cuasi-óptica.

5.1.- Introducción

En primer lugar, vamos a resumir las principales características de las antenas de bocina adaptadoras de modos gaussianos, que se proponen en el capítulo 3 de este trabajo.

5.1.1.- Resumen de las principales características de las antenas de bocina adaptadoras de modos gaussianos.

Básicamente son componentes que generan una adaptación muy eficiente entre una estructura de campos en el interior de una guía de onda, en principio de sección arbitraria, y una estructura con características gaussianas, capaz de propagarse en el espacio libre.

Las características gaussianas más interesantes se pueden reducir a tener unos frentes de fase conocidos según unas fórmulas cerradas, y a tener una expansión controlada de la potencia al propagarse. Estas características, en muchas ocasiones, pueden hacer muy apetecibles estas estructuras gaussianas para transportar energía entre dos puntos distantes a través del espacio libre, por las ventajas que tienen frente a un guiado convencional de la energía utilizando guías de onda, comentadas ya en el capítulo de introducción de este trabajo.

Las antenas adaptadoras “gaussianizarán” la distribución de campo de entrada, permitiendo un guiado cuasi-óptico de la potencia, mediante la utilización de los reflectores adecuados.

Estos componentes, al ser componentes en guía de onda pasivos, son intrínsecamente recíprocos, por lo que tanto se pueden utilizar en transmisión como en recepción, es decir, pueden recoger eficientemente una estructura gaussiana hacia el interior de una guía de ondas.

En la mayoría de las aplicaciones de estas antenas será necesario utilizar cierto número de reflectores, o en general, dispositivos correctores de fase. Como mínimo entre una antena adaptadora que actúe de emisor y otra que actúe de receptor, necesitamos un elemento corrector de fase, con tal de que el haz se focalice hacia el receptor, siempre y cuando queramos recibir la totalidad de la potencia enviada.

Una de las aplicaciones más directa y general de este tipo de antenas es la radiodifusión, básicamente desde satélite, ya que con una antena de este tipo, junto con

un reflector parabólico convencional, podemos obtener unas muy buenas prestaciones ya sea en transmisión como en recepción: niveles de polarización cruzada y lóbulos laterales, directividad y eficiencia [Del Río, 96a].

5.2.- Codo cuasi-óptico

La aplicación más sencilla de estas antenas, excluyendo las aplicaciones de radiodifusión, es la implementación de un codo cuasi-óptico.

El codo cuasi-óptico, no es más que una mejora de un “Mitre bend” [Marcatilli, 62 y 64], siendo este un componente en guía de ondas circular, que une dos guías de onda de ejes perpendiculares, colocando un plano conductor en la intersección (figura 5.1).

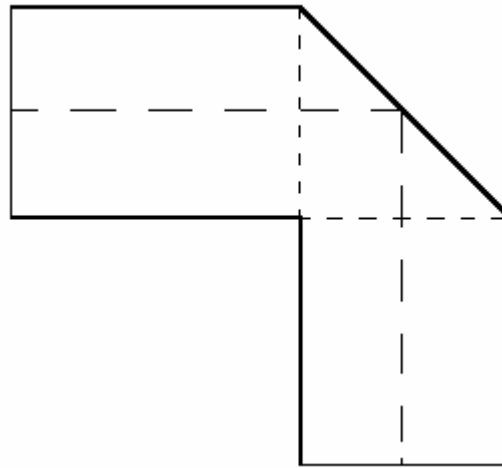


Figura 5.1.- Corte transversal de un “Mitre bend” en guía de onda circular.

Idealmente, la potencia incidente que entra por cualquiera de la dos guías, debe reflejarse en la superficie conductora plana, y generar como fruto de esta reflexión la misma distribución de campo incidente en la guía de onda circular de salida. Para un funcionamiento correcto de este dispositivo, se requiere que la distribución de campo incidente tenga un patrón de radiación con bajos lóbulos laterales (los niveles de campo cerca de la paredes conductoras de la guía son bajos y no generan difracción) y unos frentes de fase planos.

Debido a la desaparición del guiado, al entrar en el codo, los frentes de fase dejan de ser planos (efecto de radiación en el interior del codo), y difícilmente un reflector plano podrá volver a reconstruir exactamente la distribución de entrada. Esto lo podemos fácilmente asumir a un acoplo de potencia a modos no deseados, que deteriora la eficiencia global del componente.

Para poder controlar estos efectos, se propone mejorar la solución de Sporleder [76], utilizando dos antenas idénticas, diseñadas con el perfil “natural” propuesto en el capítulo 3, y un reflector elipsoidal, formando un ángulo de 45 grados con los dos ejes de simetría de las dos guías de onda. Con la primera antena, “gaussianizamos” el modo de entrada al codo, quedando controlada la difracción mediante un dimensionado adecuado del reflector. Al mismo tiempo, los frentes de fase quedan perfectamente definidos, siendo cuasi-esféricos. Por simetría, el haz reflejado en el reflector elipsoidal, focalizará en el interior de la segunda guía de ondas, con la ayuda de la antena receptora idéntica (figura 5.2).

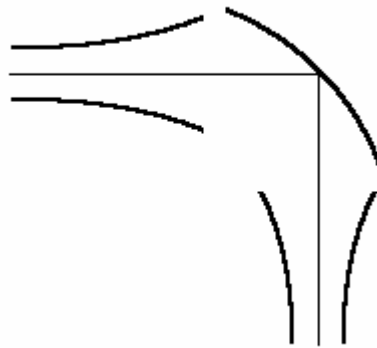


Figura 5.2.- Representación esquemática de un codo cuasi-óptico de 90 grados en guía de onda circular, utilizando dos antenas y un reflector.

Además, este tipo de configuración de codo cuasi-óptico permite realizar fácilmente de la misma manera codos de ángulos de un valor diferente de los 90 grados, cambiando únicamente el diseño del reflector.

En el proceso de diseño de las antenas se puede predecir con mucha exactitud la posición del centro de fases, lo que resulta ser de mucha utilidad para el diseño apropiado del reflector en cada caso determinado.

Este tipo de codo cuasi-óptico, es válido para cualquier modo o mezcla de modos de guía de onda, con la única salvedad, de tener una distribución de campo suficientemente sobredimensionada: para que las distancias que se manejen hasta el reflector sean suficientes para poder considerar frentes de fase esféricos, y para que la influencia de la propia estructura metálica de las antenas sea despreciable.

Un ejemplo de este tipo de implementación de codos cuasi-ópticos lo tenemos en la referencia [Vlasov, Comunicación privada], en la que se presentan una serie de codos

cuasi-ópticos para los modos TE_{01} y TE_{02} de guía de onda circular lisa, utilizando bocinas con perfiles parabólicos.

El tipo de configuración de codo cuasi-óptico aquí propuesto, utilizando las antenas presentadas en el capítulo 3, es más general que los hasta ahora conocidos [Vlasov, Comunicación privada; Shapiro, 92; Edgcombe, 93], ya que son aplicables a todas las distribuciones de campo utilizadas hasta ahora (TE_{01} , HE_{11} , etc.), e incluyen nuevas posibilidades (cualquier distribución de campo suficientemente sobredimensionada, en cualquier tipo de guía de onda, ya sea en guía circular, rectangular, etc.), incrementando, en algunos casos, considerablemente las prestaciones, al controlar la difracción por el hecho de “gaussianizar” las distribuciones de campo.

5.3.- Diseño de línea de transmisión cuasi-óptica

Una línea de transmisión cuasi-óptica, está basada, como ya hemos comentado en el capítulo anterior, en la repetición iterativa de los frentes de fase con menor dispersión de la potencia. En otras palabras, consistirá en ir focalizando el haz, en puntos intermedios, utilizando reflectores diseñados adecuadamente, hasta conseguir llevar la mayor parte posible de potencia al punto donde debe ser aplicada.

El caso concreto que se presenta en este trabajo, está basado en un *Gyrotrón tecnológico*, que no es más que un generador de microondas, trabajando a potencia media. Este tipo de generadores, resulta más barato que los utilizados para alta potencia, y se utilizan básicamente en pequeños sistemas prototipos para investigación de nuevas técnicas de sinterización de cerámicas, generación de nuevos materiales y en radar avanzados [Gaponov-Grekhov, 94]. Para ello, se utiliza una pequeña cavidad, en la que se pretende conseguir una distribución de campo uniforme en el interior.

En concreto, gracias a unas *Acciones Integradas Hispano Alemanas*, financiadas por los ministerios de educación y ciencia de España y Alemania, hemos tenido ocasión de participar en la mejora de una línea de transmisión de uno de estos sistemas.

El sistema de partida, ha sido instalado en el *Forschungszentrum* de Karlsruhe (Alemania), y se basa en un gyrotrón (30 GHz.) de media potencia trabajando en régimen de onda continua, que suministra 10 KW mediante una línea de transmisión cuasi-óptica a una cavidad situada junto al gyrotrón. El sistema ha sido desarrollado en el *Instituto de Física Aplicada* de Nizhny Novgorod, Rusia.

El modo de salida del gyrotrón TE_{02} , es convertido a un gaussiano fundamental mediante una antena de Vlasov diseñada al efecto (figuras 1.1 y 1.2) junto con varios reflectores conformadores de haz. Una vez obtenido el modo gaussiano fundamental se introduce en la cavidad a través de una ventana, después de ser focalizada mediante un reflector elíptico.

Tanto los reflectores conformadores de haz, como el reflector elipsoidal, se encuentran encerrados en una caja metálica, que protege de radiación a los operadores del sistema.

Al tratarse de una estructura metálica, resulta muy sencillo calcular la eficiencia del sistema de transmisión, simplemente colocando una carga de agua en el interior de la

cavidad final y en la caja metálica. Podemos fácilmente asumir, que la potencia que se pierde por difracción en los reflectores, acabará llegando a la carga de agua. Así, la suma de la potencia medida en el interior de la caja metálica y la medida en la cavidad será la potencia total del sistema. De esta manera podemos llegar a una estimación de la eficiencia del sistema de transmisión utilizando la siguiente fórmula:

$$\eta = \frac{P_{cavidad}}{P_{cavidad} + P_{caja\ metalica}}. \quad (5.1)$$

Estas medidas, se realizaron en el *Forschungszentrum* de Karlsruhe, con el sistema original, y dieron como resultado que tan sólo el 70% de la potencia total llegaba a la cavidad final. Es decir, el 30% de la potencia que salía del gyrotrón, se perdía en el camino y debía ser convenientemente absorbida [Möbius, 96].

Para poder entender este valor tan bajo de eficiencia de transmisión, deberemos tener en cuenta que la antena de Vlasov empleada tiene una eficiencia de conversión del orden de un 85%. Además, muy probablemente, por no tener una estructura gaussiana pura, el efecto de difracción puede ser bastante mayor del esperado, llegando a los valores de pérdidas anteriormente comentados.

Indudablemente, este es un valor de pérdidas demasiado alto como para que el prototipo sea comercializado.

Desde ese momento, el objetivo fijado para la colaboración con el *Forschungszentrum* de Karlsruhe, fue el diseño de una nueva línea de transmisión basada igualmente en un guiado cuasi-óptico, que resultara más eficiente. Si conseguíamos un diseño más eficiente, sin tener que modificar la caja metálica del sistema original, el centro Alemán costearía su construcción y realizaría las medidas pertinentes.

Así pues, un parámetro de diseño bastante importante serán las dimensiones físicas reales de la caja metálica, así como la geometría concreta del sistema. En la figura 5.3, tenemos representado esquemáticamente la caja con algunas dimensiones importantes. Podemos apreciar como la incidencia hacia la cavidad tiene una inclinación de 30 grados con respecto a la vertical. Esto se debe básicamente a evitar la generación en el interior de la cavidad de modos espaciales resonantes, rompiendo con la simetría, y evitar la reflexiones hacia el gyrotrón.

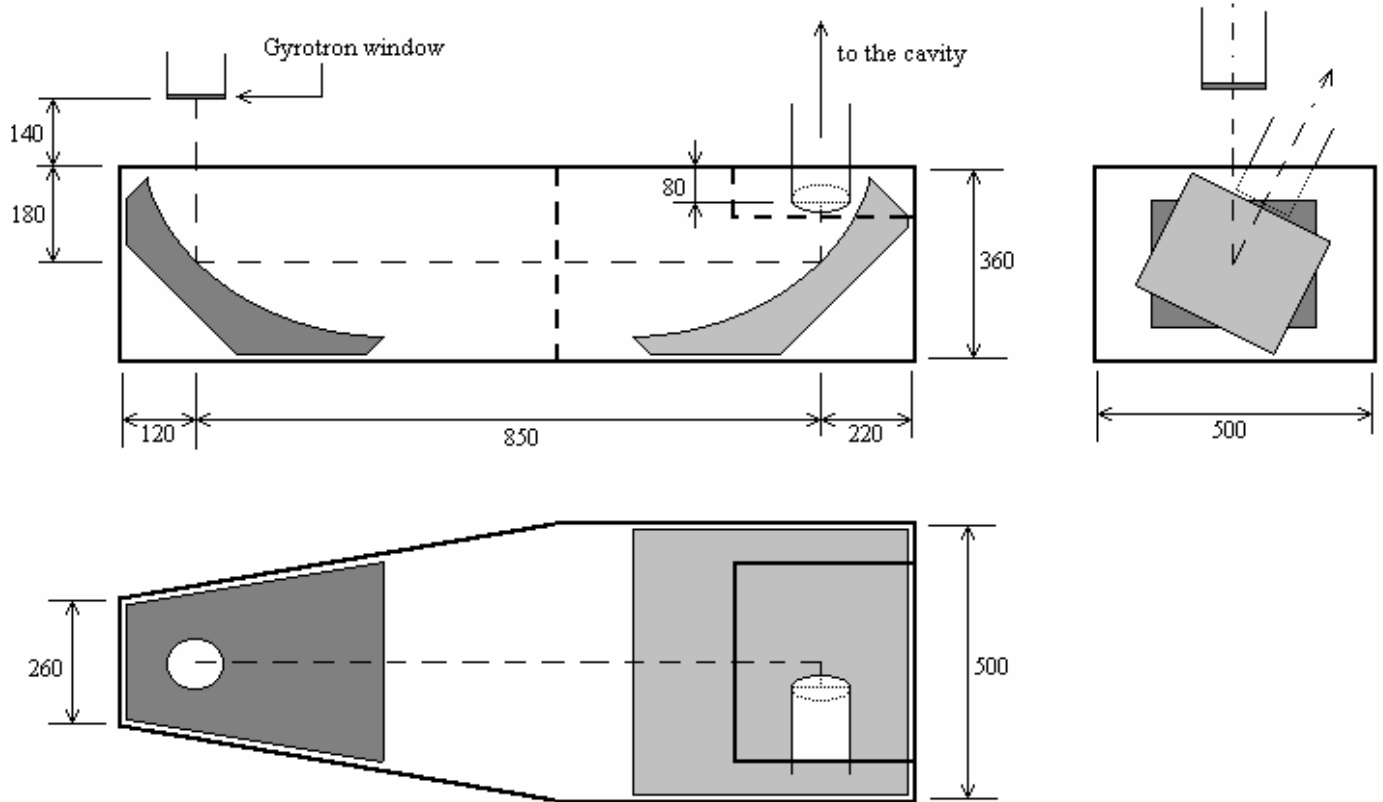


Figura 5.3.- Esquema de la caja metálica que contiene la línea de transmisión cuasi-óptica, con una representación de lo que será la disposición final de los reflectores.

Aplicando los principios básicos presentados en este trabajo, se les presentó la posibilidad de utilizar una antena de bocina de las propuestas en el capítulo 3, para convertir del modo de salida del gyrotrón, TE_{02} , a un modo cónico de segundo orden, Ψ_1 , con dos anillos concéntricos. Este modo gaussiano de orden superior, podría ser conducido mediante una guía cuasi-óptica, formada por dos reflectores elípticos, hasta la cavidad final.

Esta posibilidad, no era implementable, ya que los reflectores necesarios no cabían en el interior de la caja metálica original, ya que al utilizar un modo de orden superior, la dispersión de la potencia es mayor, como ya se vio en los capítulos anteriores.

Para intentar controlar la dispersión, existen varias posibilidades:

- colocar una transición de diámetro, para generar un “beam waist” mayor, lo que implica una dispersión menor, o bien,

- intentar convertir a un modo TE_{01} , y acoplar un gaussiano cónico de primer orden, para el que la dispersión sea menor.

La longitud entre la ventana de salida del gyrotrón, y la posición del primer reflector está muy limitada, lo que imposibilita la colocación de una transición de diámetro, ya que para que resulte ventajoso, la longitud debería ser demasiado grande. Por la misma razón, no es posible colocar un conversor de modos TE_{02} - TE_{01} convencional.

Aparte de estas posibilidades, se contempló la posibilidad de realizar uno de los dos codos necesarios con tecnología de guía de ondas convencional. De esta manera era posible realizar todo tipo de conversiones para atacar con garantías el segundo codo cuasi-óptico. El principal problema de esta solución era la pérdida de la característica de filtro longitudinal de las líneas cuasi-ópticas.

Característica de filtrado longitudinal de la líneas cuasi-ópticas

Los reflectores elípticos utilizados en las guías cuasi-ópticas, focalizan en un punto, foco, los rayos que parten de otro punto. Estos dos puntos o focos, en nuestro caso están definidos por los centros de fase de los haces incidente y reflejado por un reflector. Los centros de fase están definidos por la posición y el valor del ancho mínimo del haz (beam waist), y los podemos calcular mediante la fórmula del radio de curvatura ya presentada en el capítulo 2, y que tiene una forma:

$$R(z) = z \cdot \left[1 + \left(\frac{\pi \varpi_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]. \quad (5.2)$$

Como se puede apreciar, únicamente depende de la posición del reflector con respecto a la posición del “beam waist”, representado por la variable z , de la longitud de onda, λ , y el propio valor del “beam waist”, ϖ_0 .

Si en lugar de excitar un reflector con el haz adecuado, lo excitamos con uno que tenga el centro de fases más alejado (manteniendo el valor del ancho mínimo del haz), la dispersión de la potencia en el reflector será mayor, por lo que para el mismo reflector tendremos unas pérdidas mayores por truncamiento del haz. Por supuesto, la focalización posterior en el punto previsto en el diseño, muy previsiblemente no se verificará.

En el caso de acercar el mismo haz hacia el reflector, no introduciremos pérdidas por truncamiento, sino pérdidas por falta de focalización del haz reflejado, al no coincidir la forma de los frentes de fase incidentes con los utilizados en el diseño.

Los dos efectos anteriores, los podemos ver también, dejando fija la posición del haz y cambiar el valor del ancho mínimo de este. Los efectos son exactamente los mismos.

Resumiendo este tipo de efectos, podríamos decir que un reflector actúa de filtro, ya que, sólo aquellos haces de entrada que el centro de fase coincida con el previsto en el diseño, serán focalizados correctamente.

Este efecto de filtrado aumenta con el número de reflectores que utilizamos, ya que el haz de salida de un reflector, es el haz de entrada del siguiente. De esta manera, los errores generados en el primer reflector van creciendo a medida que van atravesando el resto de los reflectores del sistema.

En consecuencia, en un sistema de transmisión cuasi-óptico con un número suficiente de reflectores, podremos asumir que la potencia que llega al final de la línea, ha cumplido con todos los requisitos (centros de fase) de todos los reflectores por los que ha pasado, y aquella potencia que se ha perdido por el camino, puede haberse perdido por varias causas,

- a) por truncamiento del haz en la superficie del reflector, o bien,
- b) por dispersión de la potencia, al no cumplir, en algún punto de la línea, los requisitos de un determinado reflector.

Este efecto de filtro, en nuestro caso particular, nos interesa para filtrar las posibles reflexiones que se generen en la cavidad, y que puedan alcanzar al gyrotrón. Si estas llegan a tener unos niveles importantes, al trabajar en régimen permanente, pueden variar el funcionamiento normal del gyrotrón, pudiendo llegar a la ruptura del mismo. En los sistemas en guías de onda convencionales, se utilizan filtros especiales para evitar este tipo de reflexiones [Sorolla, 91]. En los sistemas basados en líneas cuasi-ópticas, el filtrado está asegurado, colocando un número suficiente de reflectores.

Si en nuestro sistema, se generara algún tipo de reflexión en la cavidad, únicamente aquella parte de esa potencia reflejada que cumpliera con todos los requisitos de todos los reflectores sería capaz de llegar hasta el gyrotrón.

Esta fue la principal causa, por lo que se decidió utilizar una línea de transmisión cuasi-óptica con dos reflectores, desechando la posibilidad de una línea de transmisión híbrida, con un codo en guía y otro con tecnología cuasi-óptica.

Diseño de la antena

Afortunadamente, fue posible encontrar un componente que en el corto espacio entre la ventana de salida del gyrotrón y la entrada a la caja metálica fuera capaz de convertir el modo TE_{02} de entrada en un mezcla de modos de TE_{01} y TE_{02} , que tenía un parecido con la distribución de campo de un cónico de primer orden de un 97.1%. La longitud de este componente es de 133 mm., y el perfil se corresponde con el propuesto en la referencia [Buckley, 91], truncando el conversor en el punto de radio mayor. Como ya se vio en el capítulo 3, colocando un tramo de antena de bocina “natural” de una longitud de 37 mm., somos capaces de llegar a una eficiencia de conversión a un modo gaussiano cónico de primer orden de un 97.8%.

La longitud total del componente ($133 + 37 = 170$ mm.), excede un poco de los 140 mm. que hay entre la ventana de salida del gyrotrón y la caja metálica, pero en la práctica ha sido posible penetrar dentro de la caja metálica algunos milímetros. Ahora, el límite de longitud para la antena, viene de la proximidad del primer reflector (figura 5.4).

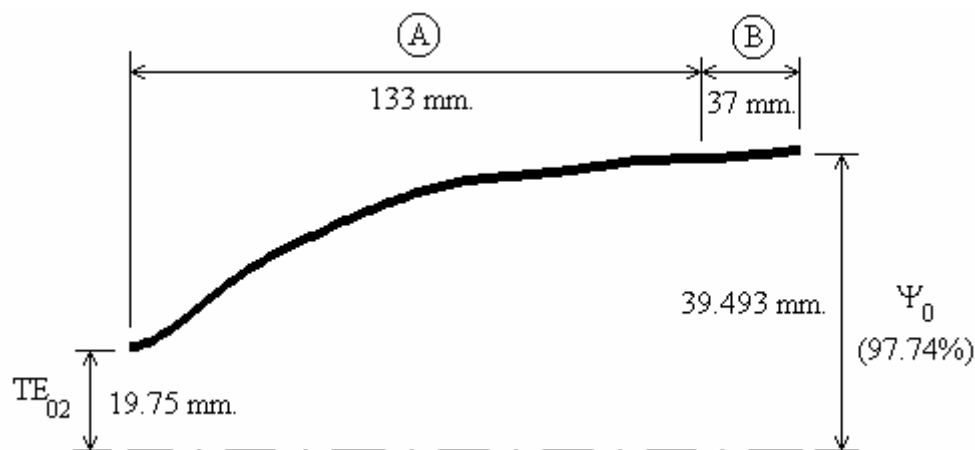
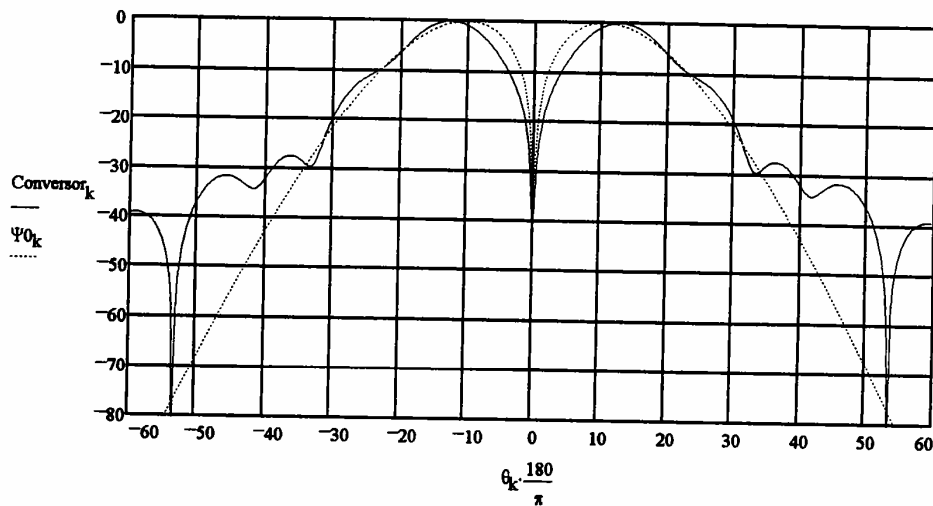


Figura 5.4.- Perfil de la antena utilizada como alimentador de la línea cuasi-óptica a 30 GHz. Consta de dos partes: A) transición de diámetro no lineal que convierte en primera aproximación del TE_{02} de entrada al Ψ_0 ; B) antena “gaussianizadora” que incrementa la eficiencia de conversión hasta el 97.74% final.

Si representamos los patrones de radiación en campo lejano de las mezclas de modos antes y después del último tramo de la antena, podremos observar la mejora que supone, tanto en los lóbulos laterales, como en la simetría de la estructura de campos resultante (figura 5.5).

Patrón de radiación al final del dispositivo conversor, $R_{out}=38$ mm.; $f=30$ GHz.



Patrón de radiación de salida final de la antena, $R_{out}=39.5$ mm.; $f=30$ GHz.

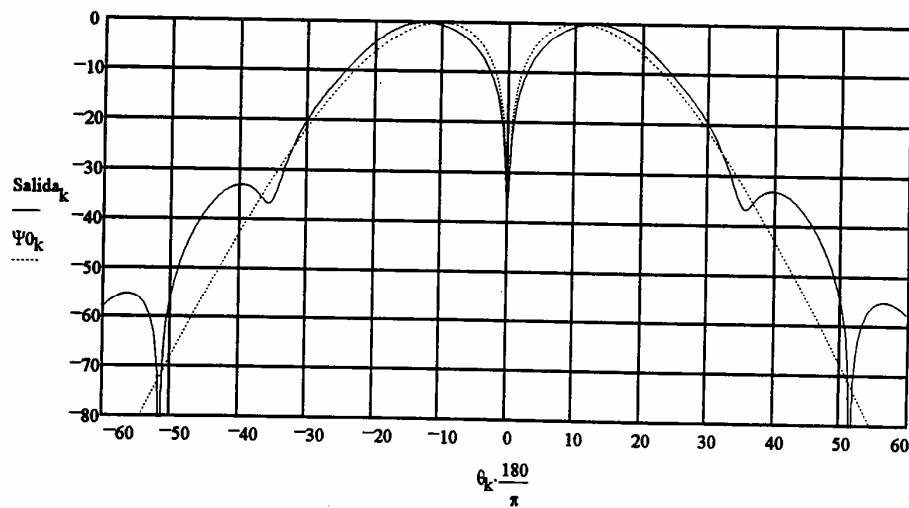


Figura 5.5.- En la parte superior representación del patrón de radiación en campo lejano de la mezcla de modos obtenida antes de la parte final de la antena, y en la inferior, el correspondiente a la mezcla de modos final.

Diseño de la línea de transmisión

El diseño de la línea de transmisión, necesita tener como parámetro de entrada, no la pureza del modo de entrada, sino más bien las características propias del modo gaussiano generado, tales como el valor y la posición del ancho mínimo del haz o “beam waist”.

En nuestro caso, los datos de entrada son:

- a) “beam waist” del haz de entrada de 11.65 mm. colocado a 162 mm. del centro del primer reflector y
- b) debido a que el diámetro de la ventana final por el que entrará la potencia a la cavidad es de 80 mm., se requiere un “beam waist” de salida de 13 mm. situado a 240 mm. del centro del segundo reflector.

Como ya hemos dicho anteriormente, el sistema estará formado por dos reflectores, que llevarán la potencia hasta su destino final.

Para definir un reflector, debemos conocer el haz que incide al mismo, y el haz reflejado que pretendemos. Como el haz reflejado por el primer reflector, debe ser la entrada del segundo, deberemos determinar absolutamente este para un diseño adecuado de la línea.

Entre dos reflectores de un resonador, existen dos soluciones, dos haces con diferente valor del “beam waist”, que cumplen los requisitos de los frentes de fase en la superficies de los reflectores. En nuestro sistema, en el tramo entre los dos reflectores, tenemos también dos posibles soluciones.

El valor del “beam waist” finalmente elegido en el tramo entre reflectores es de 38.5 mm., que está situado a 301 mm. del centro del primer reflector, y a 557 mm. del segundo reflector.

La razones para su elección son varias:

- es el valor más grande de los dos posibles, haciendo el sistema menos vulnerable a desalineamientos de la línea de transmisión,
- y es un valor que permite unas dimensiones de los reflectores adecuadas.

El tamaño final de los reflectores se define teniendo en cuenta la potencia perdida por difracción que se tolera en cada reflector. En nuestro caso, las pérdidas por difracción calculadas para la línea de transmisión son de aproximadamente un 1%.

Se ha empleado el método de Huygens, presentado en el capítulo 4, para el análisis de todo el sistema. Los resultados más significativos los tenemos en las figura 5.6 y siguientes, donde tenemos representada la densidad de potencia en diferentes puntos del trayecto.

En la figura 5.6, tenemos representada la distribución de potencia sobre la superficie del primer reflector. En ella podemos fácilmente apreciar que la distribución de potencia aparece distorsionada, debido a las diferentes longitudes existentes entre la posición del “beam waist” y los diferentes puntos del reflector. En la zona de la derecha la distancia recorrida es mayor, y por eso podemos apreciar que el haz se ha expandido más que por la parte de la izquierda.

En la figura 5.7, tenemos la distribución de potencia en la posición del “beam waist” entre reflectores, en ella se sigue observando cierta distorsión, intrínseca a cualquier reflexión en un reflector.

En la figura 5.8, podemos apreciar que la distorsión de la potencia, sobre la superficie del segundo reflector ha sido en cierta manera compensada. Si hacemos un cálculo de distancias de las diferentes zonas del haz, podremos comprobar cómo resulta lógico que no exista distorsión. Sin embargo, no debemos olvidar que es una representación sobre la superficie del segundo reflector, por lo que cualquier radiación de la misma, tendrá intrínsecamente mayor distorsión que el primer reflector si cabe.

Esto lo podemos apreciar en la distribución de potencia sobre la superficie de la ventana de la cavidad, figura 5.9.

Pese a que la distribución de los reflectores no es la adecuada, ya que se acumulan las distorsiones, la conclusión más fuerte e interesante, es que únicamente el 1% de la potencia incidente se pierde en los cálculos teóricos de la línea [Möbius, 96]. La distorsión se puede asimilar a una conversión modal, pero que sigue teniendo las mismas características gaussianas, y no se traduce directamente en pérdidas, ya que son igualmente guiados a través de los reflectores.

Q.O. Transmission Line

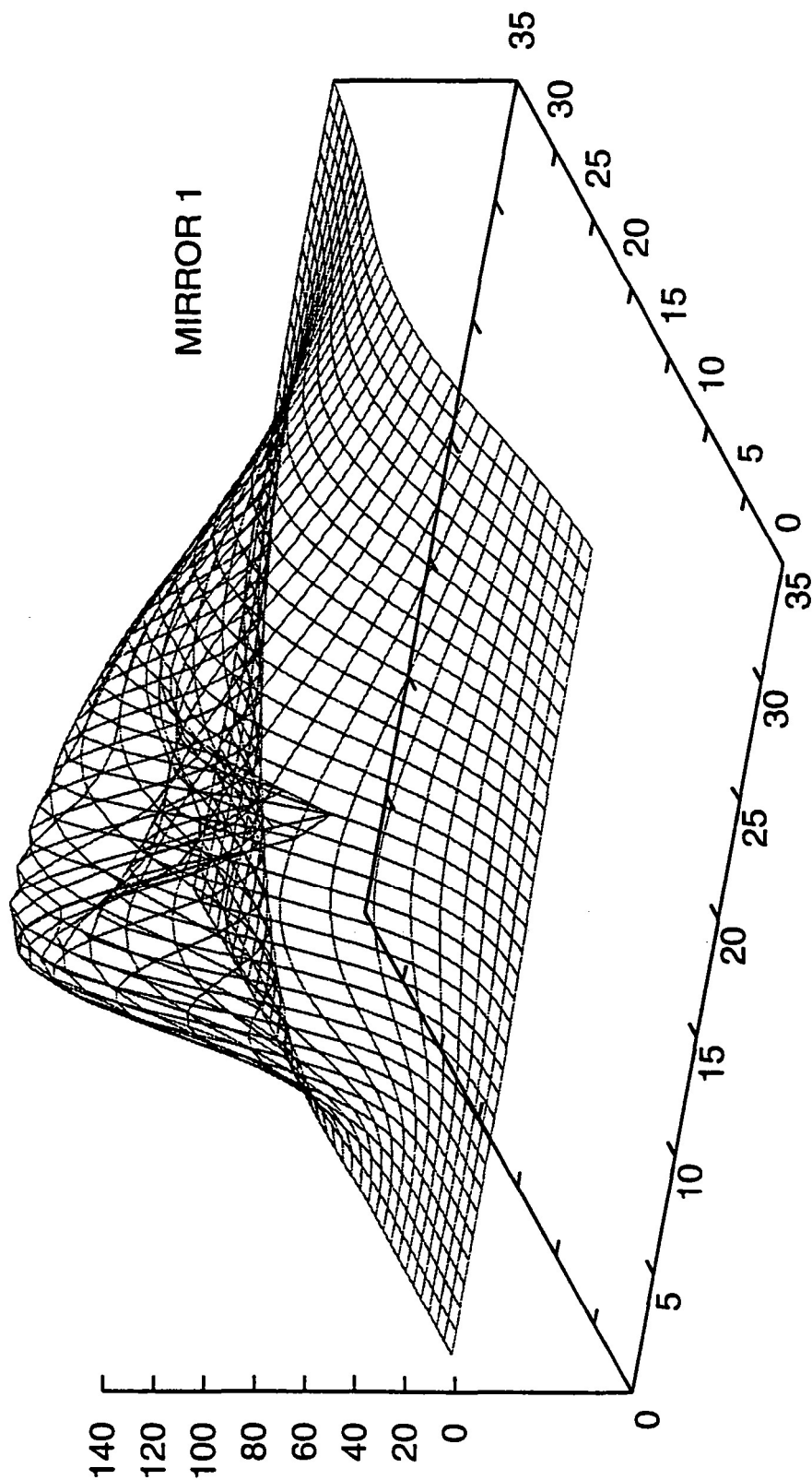


Figura 5.6.- Representación de la distribución de la densidad de potencia sobre la superficie del primer reflector.

Q.O. Transmission Line

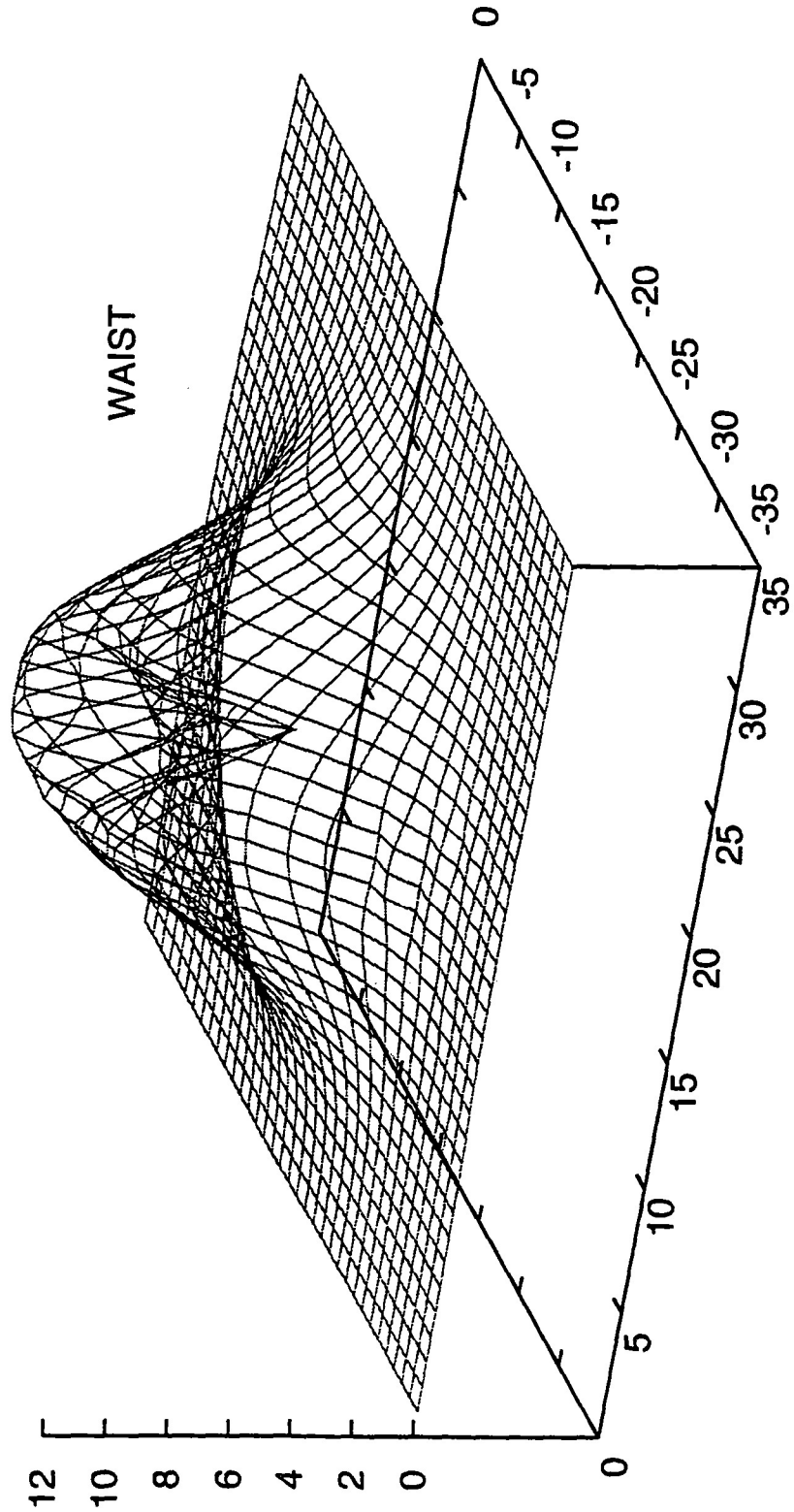


Figura 5.7.- Representación de la distribución de la densidad de potencia sobre una superficie plana en la posición del "beam waist" entre los dos reflectores.

Q.O. Transmission Line

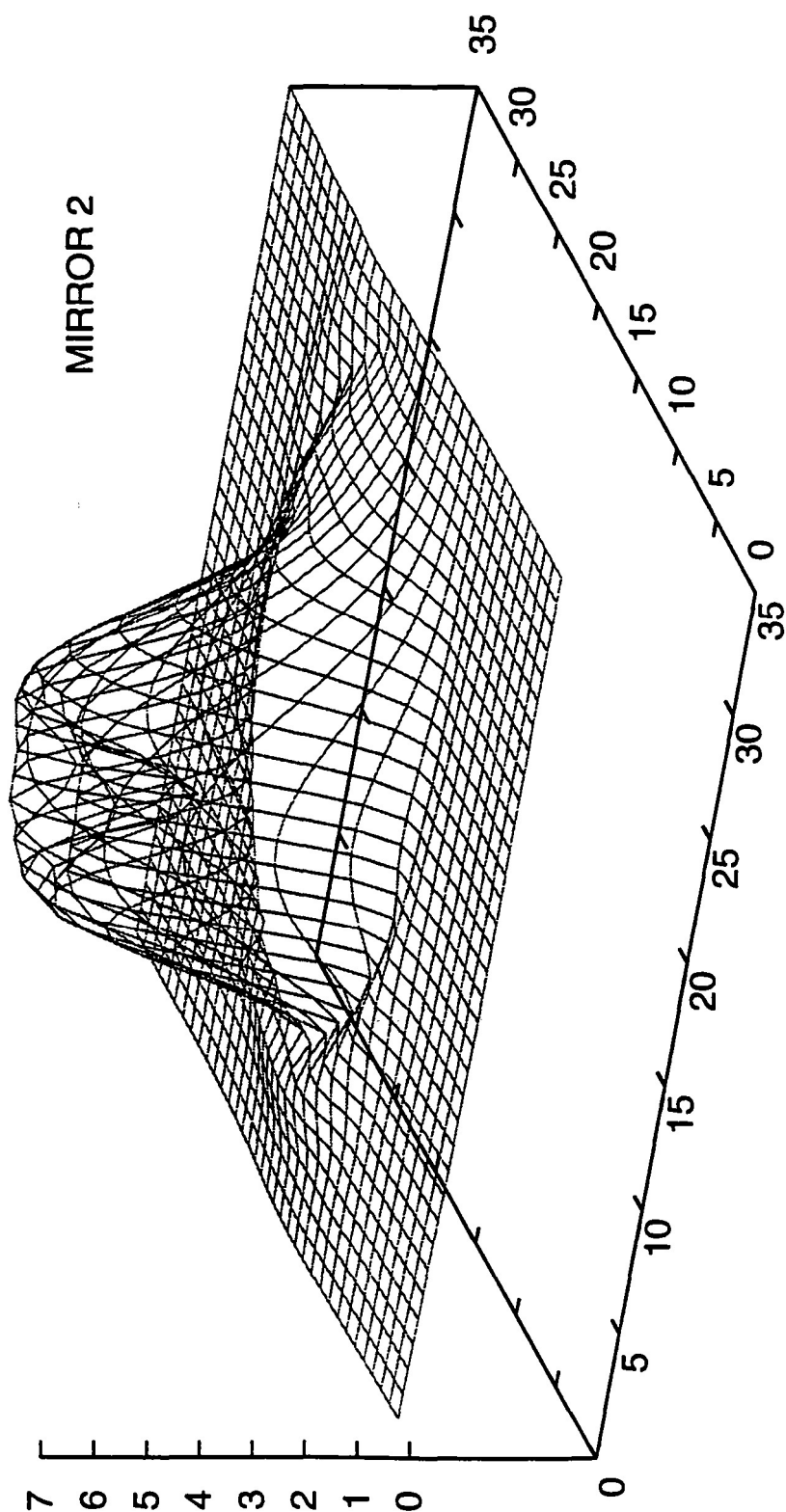


Figura 5.8.- Representación de la distribución de la densidad de potencia sobre la superficie del segundo reflector.

Q.O. Transmission Line

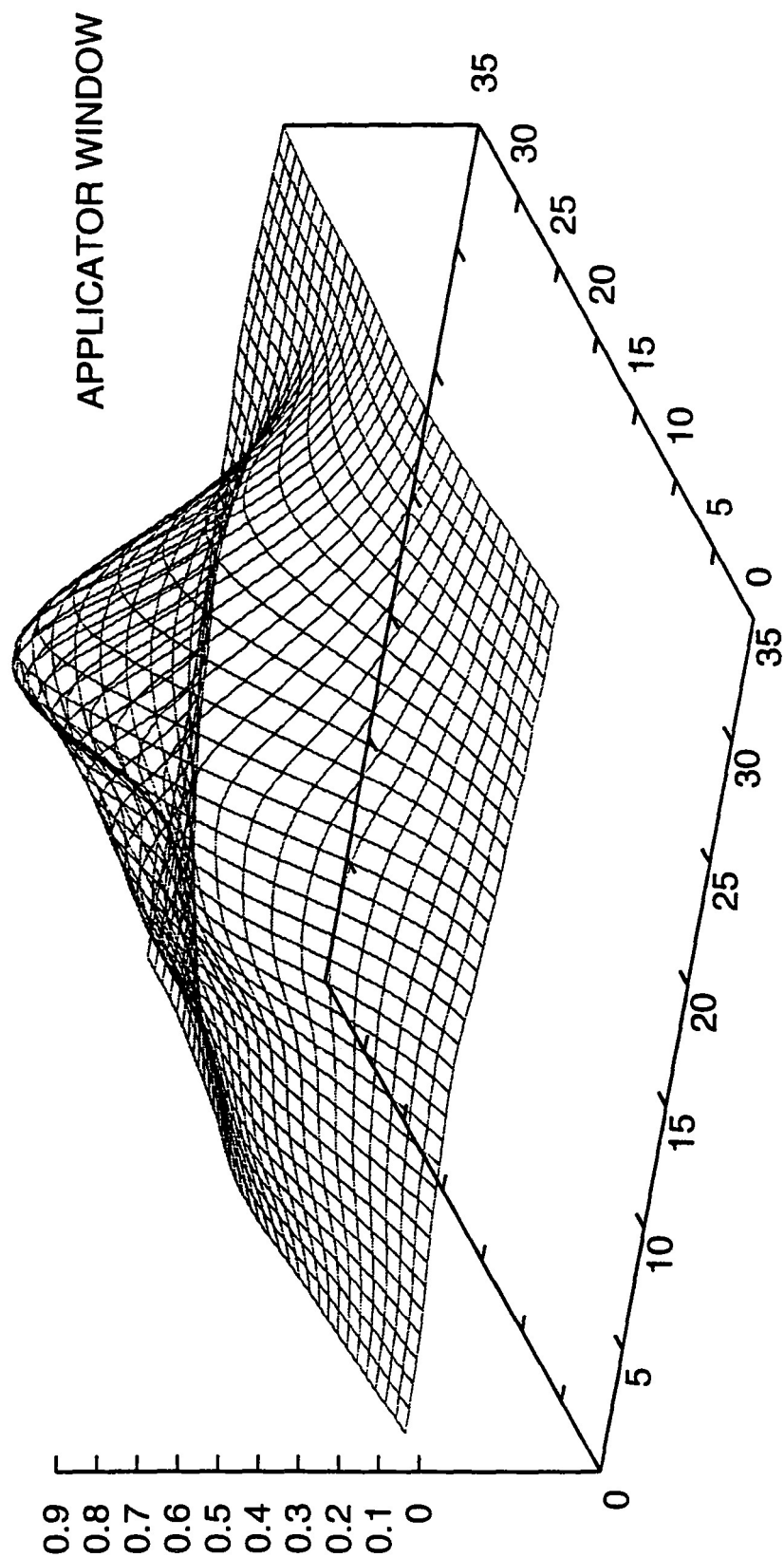


Figura 5.9.- Representación de la distribución de la densidad de potencia sobre la superficie de la ventana de entrada a la cavidad final u horno.

Resultados

El resultado más relevante de este diseño es sin duda la eficiencia del sistema de transmisión medida en los laboratorios del *Forschungszentrum*, Karlsruhe, que llega a un nivel de 91%, frente al 70% del sistema original. En la figura 5.10, podemos ver una fotografía del sistema con la nueva línea de transmisión instalada [Möbius, 96].

Con este resultado quedan verificados los cálculos realizados, tanto de la simulación numérica de la antena, técnicas de *Scattering Matrix* y *Mode Matching*, como el diseño y análisis de los reflectores mediante el método de *Huygens*.

Para explicar el 9% de pérdidas del sistema, podemos recurrir a la poca eficiencia de la estructura gaussiana de entrada (97.74%). Este valor hubiera podido aumentarse hasta un 99%, de haber tenido mayor espacio para colocar la antena convertidora. El hecho tener un modo no puro, puede generar unas mayores pérdidas por difracción que las teóricamente esperadas, un 1%.

Además, en la ventana de entrada a la cavidad, para evitar problemas de calentamiento excesivo, con riesgo de rotura de la ventana, se pierde un 2% de la potencia por truncamiento.

A parte de los efectos ya comentados, que en parte pueden ser corregidos sin unas limitaciones de espacio como las que teníamos al tener que ceñirnos a una caja ya diseñada, existen otras posibles causas que pueden explicar las pérdidas, como son:

- posibles errores en la medida de la eficiencia, tolerancias,
- pureza del modo TE_{02} que ofrece el gyrotrón y
- la reflexión de la ventana de la cavidad se desconoce.

Otro resultado importante y novedoso del diseño es la utilización de reflectores elipsoidales, ya que normalmente, por razones de sencillez en el proceso de construcción, se utilizan reflectores toroidales. Esta aproximación, en algunos casos, para sistemas que trabajan con el modo gaussiano fundamental puede resultar aceptable, pero no para sistemas que trabajen con modos de orden superior, ya que las distorsiones generadas y las pérdidas por difracción, muy probablemente serían bastante mayores.

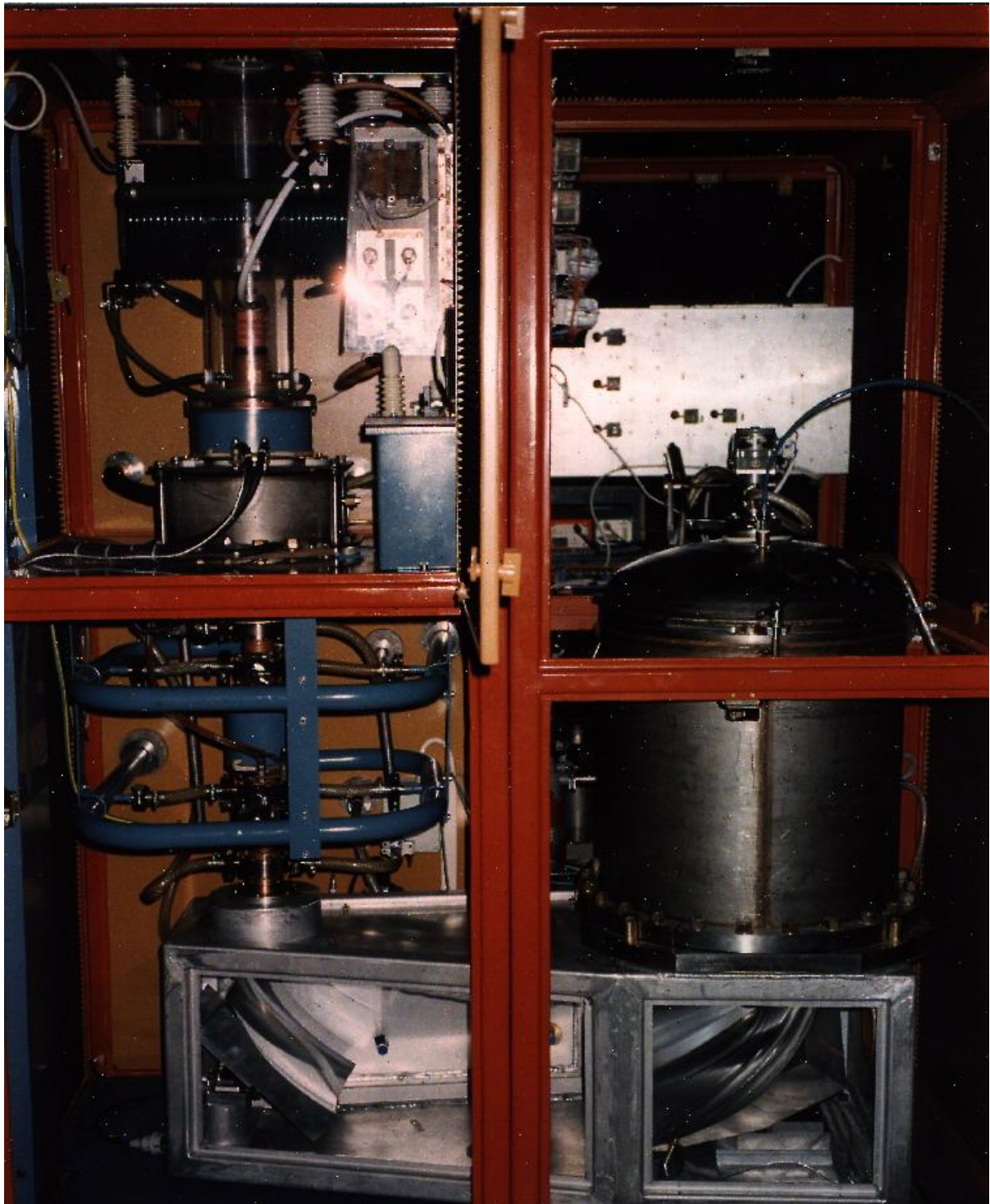


Figura 5.10.- Fotografía del sistema de calentamiento homogéneo a alta frecuencia (30GHz) instalado en el Forschungszentrum, Karlsruhe (Alemania), con el nuevo diseño de la línea de transmisión.

Capítulo 6.- Conclusiones y líneas futuras

En resumen, en este trabajo se han trabajado simultáneamente dos ideas diferentes:

- a).- estudio completo de los modos gaussianos de orden superior, y
- b).- diseño de familia de antenas de bocina para generar modos gaussianos de orden superior a partir de modos de guía.

La combinación de ambas, culmina en el diseño, construcción, medida y puesta en funcionamiento de la primera guía de onda cuasi-óptica que utiliza un modo gaussiano de orden superior, Ψ_0 , para transportar la potencia. Las medidas realizadas corroboran los métodos numéricos empleados, ya que coinciden con los resultados de las diferentes simulaciones.

Como consecuencia de este trabajo, se han desarrollado herramientas de diseño y análisis de componentes en guía de onda sobredimensionada (basados en técnicas de “Scattering Matrix” y Análisis modal) y reflectores (Huygens). Además, ha sido necesario realizar multitud de pequeños programas,

- para cálculos de eficiencias de conversión dada una mezcla de modos TE_{0m} ,
- cálculos de las mezclas necesarias de modos TE_{0m} para la obtención de una estructura gaussiana,
- cálculos de patrones de radiación,
- cálculos de fases teóricas en el interior de las bocinas conversoras,
- etc.

En este trabajo se han presentado una serie de estudios originales de gran utilidad y aplicación, como pueden ser:

- estudio completo de las características más importantes de los modos de las familias de Gauss-Laguerre y Gauss-Hermite,

- estudio de las condiciones de paraxialidad de los modos gaussianos de orden superior [Del Río, 96],
- propuesta de un nuevo perfil de antena, que adapta óptimamente las estructuras de guías de onda con el espacio libre, o lo que es lo mismo, convierte muy eficientemente una estructura de campos del interior de una guía de onda a una estructura de campos propia del espacio libre [Del Río, 95a, 95b y 96a; Gonzalo, 96],
- estudio de viabilidad de utilización de los modos gaussianos de orden superior para ser portadores de la energía a través de una línea de transmisión cuasi-óptica [Del Río, 95],
- diseño de la primera línea de transmisión cuasi-óptica que utiliza modos gaussianos de orden superior [Möbius, 96]. Esta línea de ha construido, medido y está actualmente en funcionamiento en el *Forschungszentrum* de Karlsruhe (Alemania).

Las posibles líneas futuras podrían ser:

- desarrollo de un nuevas aplicaciones de las antenas propuestas,
- desarrollo de nuevos códigos numéricos para migrar hacia otro tipo de guías de onda, como por ejemplo, guías rectangulares, circulares corrugadas, etc.
- desarrollo de nuevos códigos de análisis y síntesis de reflectores para modos gaussianos de orden superior.

Apéndices

Métodos numéricos empleados

En estos apéndices, vamos a presentar de una forma sencilla, los métodos numéricos empleados para la simulación de los componentes en guía de onda circular presentados en este trabajo.

En primer lugar, se presentan los métodos utilizados para el análisis de los componentes (análisis modal y técnicas de utilización de la matriz de dispersión), pasando a métodos utilizados para calcular patrones de radiación en campo lejano (ya que es este el método de validación principalmente empleado), y finalmente los métodos utilizados para interpretar los resultados obtenidos con los componentes propuestos (cálculo de eficiencias de conversión a estructuras gaussianas).

Apéndice I

I.- Método de Análisis modal y de la matriz generalizada de dispersión.

En este trabajo se han realizado múltiples cálculos de diferentes componentes en guía de onda circular muy sobredimensionada. Para estos cálculos se ha utilizado una herramienta basada en los métodos de análisis modal, para el estudio de discontinuidades, y el de matriz de dispersión generalizada (S) o de “Scattering”, para la concatenación de múltiples discontinuidades ya caracterizadas previamente por una matriz de dispersión [Rebollar, 84; Encinar, 85; Shih, 89; Chu, 86].

A grandes rasgos, la idea se basa en discretizar el componente en tramos pequeños de radio constante, con el fin de caracterizar mediante una matriz de dispersión generalizada cada discontinuidad o salto entre tramos de diferente valor de radio, que junto con unas matrices de traslación (entre discontinuidades), nos permitirán construir una sola matriz de dispersión generalizada que caracterice al componente completo.

La principal restricción de los programas utilizados, es el que únicamente permiten estudiar componentes con variaciones simétricas de radio, debido a la simplificación que ello supone en cuanto a la implementación del método de análisis modal. Esta restricción, pese a ser importante, nos permite estudiar todos los componentes en guía de onda que se presentan en este trabajo. Para salvar esta restricción y poder resolver las discontinuidades entre guías de onda de sección arbitraria, deberemos recurrir a métodos numéricos, como pueden ser el método de las diferencias finitas o elementos finitos [García, 91].

Existe bastante literatura que describe estos dos métodos [Rebollar, 84; Shih, 89; Chu, 86], no obstante a continuación vamos a hacer una breve presentación de ambos métodos.

I.1.- Análisis Modal

Consiste en caracterizar una discontinuidad transversal expresando el campo electromagnético a ambos lados como una suma de modos propios de cada guía de

onda, obligando al cumplimiento de las condiciones de salto de las componentes transversales del campo eléctrico y magnético.

El análisis modal es un método absolutamente general, que permite caracterizar cualquier tipo de discontinuidad transversal entre dos guías de onda, incluso en el caso de tener secciones diferentes. Lógicamente, debido a las enormes posibilidades de complicación, el problema general resulta inabordable analíticamente, pero si se puede resolver utilizando técnicas numéricas.

En nuestro caso, se ha optado por un método simplificado, que permite analizar discontinuidades entre dos tramos rectos de guía de onda de sección circular concéntricos pero con distinto radio (figura I.1). Realizando esta simplificación el problema es abordable desde el punto de vista analítico, de una forma relativamente sencilla y con una total fiabilidad.

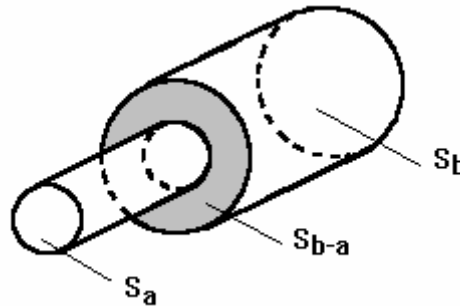


Figura I.1.- Representación de la unión entre dos tramos de guía de onda concéntricos con diferente valor de radio.

A continuación realizaremos una breve descripción del método de análisis modal de discontinuidades. Un estudio mucho más detallado se presenta en [Rebollar, 84].

Los campos a ambos lados de la discontinuidad se expanden en términos de los modos en las respectivas regiones con unos coeficientes por determinar que serán precisamente las incógnitas del problema. Las condiciones que se deben cumplir las deberemos fijar justo en la unión entre los dos tramos de guía de onda.

Como vemos en la figura I.1, justo en la unión entre las dos guías de onda, tenemos un área común entre las dos guías de onda, que lógicamente corresponde con la sección de la guía de onda de menor radio (S_a), y un área, que vista desde la guía de onda más grande, supone una pared de conductor (S_{b-a}), donde las componentes transversales del campo eléctrico y magnético deben cumplir las condiciones de contorno.

Si definimos las funciones modales en las guías de onda de secciones S_a y S_b (figura I.1) como ϕ_{an} y ϕ_{bn} , respectivamente, siendo n un índice indicativo del modo¹, podremos expresar los campos transversales de la siguiente manera:

$$E_t \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) \phi_{bn} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) \phi_{an} & \text{dentro de } S_a \\ 0 & \text{dentro de } S_{b-a} \end{cases} \quad (\text{I.1.a})$$

$$H_t \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^+ - B_n^-) Y_{bn} \phi_{bn} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^+ - A_n^-) Y_{an} \phi_{an} \quad \text{dentro de } S_a \quad (\text{I.1.b})$$

siendo Y_{an} y Y_{bn} las admitancias de cada modo de las guías de onda a y b , para poder expresar con las mismas funciones modales ϕ_{an} y ϕ_{bn} los campos eléctricos y magnéticos. Los superíndices $+$ y $-$ indican la onda de amplitud propagándose en sentido positivo y negativo de z respectivamente; los coeficientes A_n^+ , A_n^- , B_n^+ y B_n^- son los coeficientes a determinar (figura I.2).

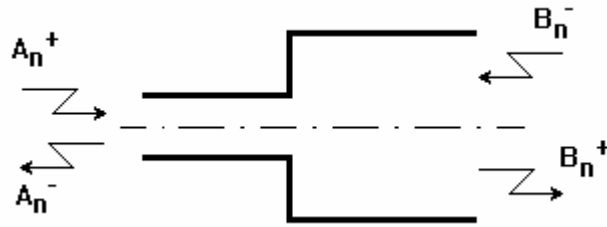


Figura I.2.- Corte transversal de una discontinuidad con el convenio de signos elegido para el estudio.

Si trabajamos un poco las ecuaciones anteriores, por ejemplo la primera parte de la ecuación I.1.a, multiplicando por ϕ_{am} e integrando ambos miembros dentro del área S_a tendremos,

$$\int_{S_a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) \phi_{bn} \right] \cdot \phi_{am} \cdot dS = \int_{S_a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) \phi_{an} \right] \cdot \phi_{am} \cdot dS \quad (\text{I.2})$$

aplicando linealidad de la integral y el sumatorio y sacando fuera de la integral los términos constantes, resulta,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) \int_{S_a} \phi_{bn} \phi_{am} \cdot dS = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) \int_{S_a} \phi_{an} \phi_{am} \cdot dS. \quad (\text{I.3})$$

Definiendo la función correlación H_{mn} como:

¹ Este índice no tiene nada que ver con los índices radial y azimutal de los modos TE y TM de una guía de onda circular lisa. Simplemente es un índice de una lista con todos los modos a considerar, sin importar mucho el orden en que los modos estén colocados, al tratarse de un estudio general en el que se considera un número infinito de modos.

$$H_{mn} = \int_{S_a} \phi_{bn} \phi_{am} \cdot dS \quad (I.4)$$

y teniendo en cuenta, que debido a las condiciones de ortogonalidad necesarias en las funciones modales ϕ_{an} , la integral del miembro de la derecha de la ecuación I.3 vale,

$$\int_{S_a} \phi_{an} \phi_{am} \cdot dS = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (I.5)$$

finalmente obtendríamos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) H_{mn} = A_m^+ + A_m^- \quad (I.6)$$

Utilizando un proceso totalmente análogo, podremos partir de la ecuación I.1.b, y llegar a la expresión final:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_n^+ - B_n^-) H_{mn} Y_{bn} = (A_m^+ - A_m^-) Y_{am} \quad (I.7)$$

La condición de ortogonalidad de las funciones de la guía de onda mayor (b), la podremos aplicar únicamente en la ecuación I.1.a, de manera que obtendremos:

$$\int_{S_b} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (B_n^+ + B_n^-) \phi_{bn} \right] \cdot \phi_{bm} \cdot dS = \int_{S_a} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) \phi_{an} \right] \cdot \phi_{bm} \cdot dS \quad (I.8)$$

que siguiendo un razonamiento análogo a los anteriores, podemos llegar a la expresión final:

$$B_m^+ + B_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^+ + A_n^-) H_{nm} \quad (I.9)$$

El objetivo principal de este estudio es el de caracterizar una discontinuidad entre dos tramos de guía de onda circular lisa de diferente valor de radio mediante una matriz de dispersión generalizada (matriz de “Scattering” o S), que está definida como:

$$\begin{aligned} a^- &= S_{11} a^+ + S_{12} b^- \\ b^+ &= S_{21} a^+ + S_{22} b^- \end{aligned} \quad (I.10)$$

donde a^+ , a^- , b^+ y b^- son vectores, en principio de dimensión infinita, que representan A_n^+ , A_n^- , B_n^+ y B_n^- respectivamente.

Para poder llegar a una representación de la matriz de dispersión (ecuación I.10) a partir de las ecuaciones I.6, I.7 y I.9, deberemos traducir estas a una notación matricial. De esta manera, las ecuaciones I.6, I.7 y I.9 quedarán ahora:

$$H(b^+ + b^-) = a^+ + a^- \quad (I.11)$$

$$HY_b(b^+ - b^-) = Y_a(a^+ - a^-) \quad (\text{I.12})$$

$$b^+ + b^- = H^t(a^+ + a^-) \quad (\text{I.13})$$

donde H es una matriz que tiene los elementos definidos según la ecuación I.4, y Y_a y Y_b son los vectores columna correspondientes formados a partir de las admitancias de cada modo en los tramos de guía de onda a y b respectivamente.

De las ecuaciones I.11 y I.13, podemos deducir rápidamente que se cumple que $H^t = H^{-1}$, ya que las tres ecuaciones anteriores se deben cumplir simultáneamente. Si definimos Z_b como el vector fila de impedancias de cada modo de la guía de onda b , de tal manera que $Z_b Y_b = I$, podemos volver a escribir la ecuación I.12,

$$b^+ - b^- = Z_b H^t Y_a (a^+ - a^-). \quad (\text{I.14})$$

Trabajando con las ecuaciones I.11 y I.14, podemos llegar a las expresiones finales para las matrices S_{11} , S_{12} , S_{21} y S_{22} de la ecuación I.10,

$$S_{22} = (I - Z_b H^t Y_a H)^{-1} (I + Z_b H^t Y_a H) \quad (\text{I.15})$$

$$S_{21} = 2(I + Z_b H^t Y_a H)^{-1} Z_b H^t Y_a \quad (\text{I.16})$$

$$S_{12} = H(I + S_{22}) \quad (\text{I.17})$$

$$S_{11} = H S_{21} - I \quad (\text{I.18})$$

Lógicamente, las matrices utilizadas no pueden ser infinitas, por lo que tendremos que limitar el número de modos a considerar. Para poder seguir aplicando las ecuaciones y principios expuestos en este apéndice, deberemos elegir el mismo número de modos en los dos tramos de guía de onda, con la única finalidad de tener matrices cuadradas, con tal de poder realizar la inversa de una matriz sin problemas.

El limitar el número de modos adecuadamente será un punto básico a considerar para cada caso. Para un óptimo aprovechamiento del tiempo y memoria necesarios para realizar el cálculo, nos interesa un número de modos pequeño. Por contra, interesa un número grande de modos para hacer más real y fiable el cálculo. Existe cierto compromiso que puede ser relativamente solucionado para cada caso, haciendo dos cálculos; eligiendo para el primero un número de modos pequeño pero que pueda resultar suficiente, y para el segundo un número de modos ligeramente mayor. Si los resultados difieren, deberemos seguir aumentando el número de modos, si por el contrario los resultados se mantienen dentro de unos márgenes, el número de modos

elegido en primer lugar era efectivamente suficiente. Muy probablemente, no resultará necesario aplicar este procedimiento para todos los cálculos, ya que la experiencia acumulada por el usuario, como consecuencia del cálculo de estructuras similares, puede llevar a una elección inicial del número de modos bastante correcta.

I.2.- Matriz de dispersión

Una vez que con la técnica de análisis modal hemos sido capaces de caracterizar una discontinuidad entre dos guías de onda circulares mediante una matriz de dispersión, podemos analizar varias discontinuidades consecutivas simplemente “encadenando” las matrices de dispersión correspondientes, formando una matriz de dispersión global.

Básicamente, este será el procedimiento a seguir para analizar componentes más complejos. Se dividirá el componente en un número suficiente² de tramos rectos de guía de onda (figura I.3), se caracterizan todas las discontinuidades y se combinan todas las matrices de dispersión correspondientes para obtener una matriz de dispersión global.

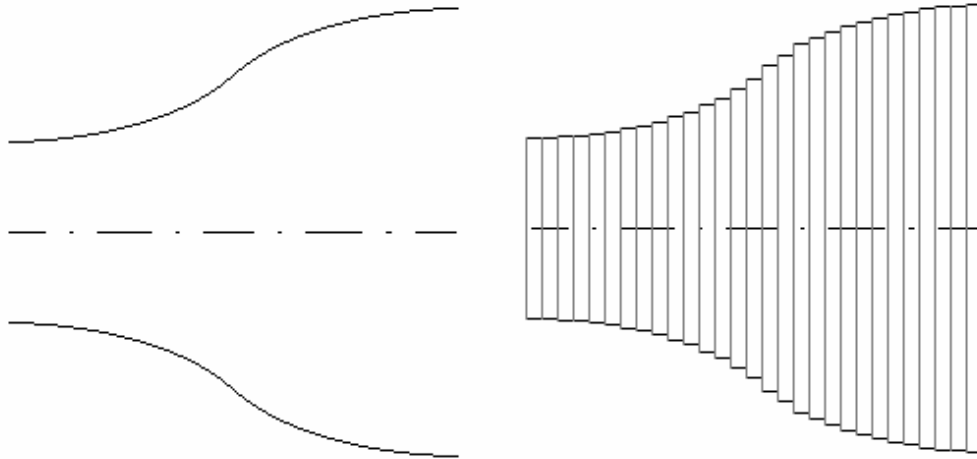


Figura I.3.- Proceso de división de un componente en tramos rectos de guía de onda.

No podemos olvidar, que la matriz de dispersión obtenida mediante el método de análisis modal, resuelve únicamente la discontinuidad, por lo que deberemos añadir una nueva matriz de dispersión entre dos discontinuidades, con tal de simular la propagación por una guía de onda de radio constante. La forma de esta nueva matriz de dispersión será extremadamente simple, ya que las submatrices S_{11} y S_{22} son nulas al tratarse de un

guía de onda de radio constante, y que las submatrices S_{12} y S_{21} serán matrices diagonales, donde los coeficientes de la diagonal corresponden con términos de fase, que representan la propagación en uno u otro sentido.

Teniendo en cuenta todo lo expuesto hasta ahora, tenemos tanto las discontinuidades como los tramos rectos representados por matrices de dispersión. El problema de cálculo de un componente se reduce a la composición adecuada de todas estas matrices de dispersión.

A continuación vamos a estudiar como sería la combinación entre dos matrices de dispersión conocidas.

A.- Combinación de dos matrices de dispersión

La nomenclatura que utilizaremos será la representada en la figura I.4. En ella se definen las entradas y salidas de las dos matrices de dispersión que pretendemos combinar.

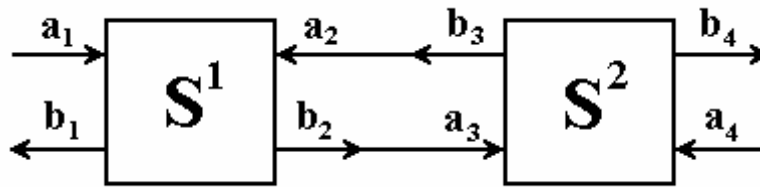


Figura I.4.- Representación del convenio de entradas y salidas y nomenclatura.

Sabemos que se cumplen las siguientes expresiones individuales:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= S_{11}^1 a_1 + S_{12}^1 a_2 \\ b_2 &= S_{21}^1 a_1 + S_{22}^1 a_2 \end{aligned} \right\} \quad (I.19)$$

$$\left. \begin{aligned} b_3 &= S_{11}^2 a_3 + S_{12}^2 a_4 \\ b_4 &= S_{21}^2 a_3 + S_{22}^2 a_4 \end{aligned} \right\} \quad (I.20)$$

Además, podemos observar fácilmente de la figura I.4, que $b_2 = a_3$ y que $a_2 = b_3$, y definiendo dos nuevas variables x e y que correspondan con a_2 y b_2 respectivamente, tendremos que el sistema de dos matrices de dispersión queda tal y como podemos comprobar en la figura I.5.

² Existe un compromiso, no interesa muy grande, ya que aumentaría mucho e innecesariamente el tiempo de cálculo, ni muy pequeño, ya que puede falsear los resultados, al no muestrear correctamente el componente bajo estudio.

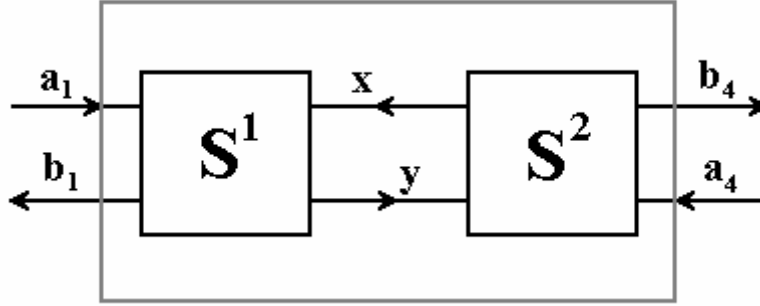


Figura I.5.- Representación de las entradas y salidas globales.

Nuestro objetivo es llegar a un sistema global, en el que se cumpla:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= S_{11} a_1 + S_{12} a_4 \\ b_4 &= S_{21} a_1 + S_{22} a_4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.21})$$

por que tendremos que trabajar con las ecuaciones I.19 y I.20, para obtener una expresión analítica de las diferentes submatrices de dispersión de la matriz global, fruto de la combinación de las dos originales.

Para poder ir calculando las diferentes submatrices, deberemos ir anulando una u otra entrada, y trabajar con una u otra ecuación.

Por ejemplo, para calcular la submatriz S_{11} , tendremos que anular la entrada a_4 , y buscar la expresión de la relación entre b_1 y a_1 , como puede deducirse muy fácilmente de la ecuación I.21.

Las ecuaciones I.19 y I.20, anulando a_4 y tomando las variables intermedias x e y , quedarán ahora,

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= S_{11}^1 a_1 + S_{12}^1 x \\ y &= S_{21}^1 a_1 + S_{22}^1 x \\ x &= S_{11}^2 y \\ b_4 &= S_{21}^2 y \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.22})$$

Sustituyendo la tercera ecuación en la segunda y despejando la variable intermedia y , obtenemos:

$$y = \left(I - S_{22}^1 S_{11}^2 \right)^{-1} S_{21}^1 a_1 \quad (\text{I.23})$$

a continuación sustituyendo este resultado en la tercera,

$$x = S_{11}^2 \left(I - S_{22}^1 S_{11}^2 \right)^{-1} S_{21}^1 a_1 \quad (\text{I.24})$$

y sustituyendo la expresión de x en la primera, finalmente obtenemos:

$$S_{11} = S_{11}^1 + S_{12}^1 S_{11}^2 (I - S_{22}^1 S_{11}^2)^{-1} S_{21}^1. \quad (I.25)$$

De una manera totalmente análoga, podemos fácilmente llegar a las expresiones para las submatrices restantes, que tienen una forma:

$$S_{12} = S_{12}^1 (I - S_{11}^2 S_{11}^1)^{-1} S_{12}^2 \quad (I.26)$$

$$S_{21} = S_{21}^2 (I - S_{22}^1 S_{11}^2)^{-1} S_{21}^1 \quad (I.27)$$

$$S_{22} = S_{22}^2 + S_{21}^2 (I - S_{22}^1 S_{11}^2)^{-1} S_{22}^1 S_{12}^2 \quad (I.28)$$

Computacionalmente, resulta muy interesante observar que para la obtención de las submatrices S_{11} , S_{21} y S_{22} necesitamos hacer una inversa, pero que resulta ser común a las tres. El cálculo de S_{12} lo podemos hacer, de una manera más sencilla, aplicando propiedades de las matrices, y sabiendo que $S_{21}^T = S_{12}$ [Shih, 89; Chu, 86]. De esta manera, resolviendo una matriz inversa, somos capaces de obtener la matriz de dispersión resultante.

B.- Combinación de N matrices de dispersión

Iterando este mismo proceso, las veces que sea necesario, podemos llegar a componer el número de discontinuidades que deseemos, con tal de obtener una matriz de dispersión global para todo el componente, y poder estudiarlo como si de un cuadripolo se tratara.

Existen diferentes métodos para ir componiendo las diferentes matrices de dispersión de un componente. Podemos ir incorporando matrices de dispersión según vamos avanzando por el componente, o bien ir combinando por parejas en diferentes pasadas. La elección de un método u otro, se deberá a las necesidades de información que se tengan, y de los recursos de memoria y tiempo disponibles.

Sin embargo, pese a existir muchas posibles maneras de combinar las matrices, el resultado final será siempre el mismo.

El código empleado SCATTMAT [Liberal, 96], permite una visualización de las distribuciones de potencia a lo largo del componente.

Es importante remarcar, que el código utilizado supone una perfecta adaptación al final del componente, es decir, el medio destino absorbe toda la potencia que sobre él incide como salida del componente bajo estudio, y no genera reflexiones. Esta

suposición será cierta siempre y cuando trabajemos con guías de onda suficientemente sobredimensionadas. En otras palabras, el sobredimensionamiento de una guía de onda es indicativo de la influencia o no de la estructura conductora o metálica de la guía de onda sobre los campos electromagnéticos del interior.

Conviene recordar que los componentes que se presentan en este trabajo son componentes tipo antena de bocina, y que el sobredimensionado va creciendo a lo largo de la antena, por lo que es de esperar que los resultados que se presentan sean bastante reales y fiables.

Apéndice II

II.- Representación del patrón de radiación en campo lejano

Básicamente, la verificación de los resultados obtenidos por la simulación se hace, en la mayoría de los casos, en función del patrón de radiación en campo lejano. Para el cálculo teórico de estos patrones se utiliza la formulación presentada en [Garin, 89], en donde se recopilan las fórmulas de propagación de los modos en guía de onda circular y las fórmulas de cálculo del patrón de radiación en campo lejano.

Las fórmulas presentadas en esta misma referencia, suponen que las contribuciones debidas a la discontinuidad existente entre el final de la guía de onda y el espacio libre son despreciables, así como las reflexiones que se pueden originar. En definitiva, estamos ante el mismo criterio de sobredimensionamiento expuesto en el punto anterior.

Las fórmulas que describen la radiación a partir de una guía de radio a son las siguientes:

TE_{mn} :

$$E_{\theta} = j^{m+2} \frac{C}{R} \sqrt{P_{mn}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\beta'_{mn} \pi}} \frac{m}{\sqrt{\mu'^2_{mn} - m^2}} \left(1 + \frac{\beta'_{mn}}{k} \cos\theta \right) \frac{J_m(k \sin\theta)}{\sin\theta} \cdot \left[\cos\left(q - \frac{\pi}{2}\right) + j \tau \sin\left(q - \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (II.1)$$

$$E_{\psi} = j^{m+2} C \frac{ka}{R} \sqrt{P_{mn}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\beta'_{mn} \pi}} \frac{\mu'^2_{mn}}{\sqrt{\mu'^2_{mn} - m^2}} \left(\frac{\beta'_{mn}}{k} + \cos\theta \right) \cdot \frac{J'_m(k \sin\theta)}{\mu'^2_{mn} - (k \sin\theta)^2} [\cos q + j \tau \sin q] \quad (II.2)$$

TM_{mn} :

$$E_{\theta} = j^{m+2} C \frac{k^3 a^2}{R} \sqrt{P_{mn}} \frac{1}{\sqrt{\omega\epsilon\beta_{mn} \pi}} \left(\frac{\beta_{mn}}{k} + \cos\theta \right) \frac{J_m(k \sin\theta)}{\mu'^2_{mn} - (k \sin\theta)^2} \sin\theta [\cos q + j \tau \sin q] \quad (II.3)$$

donde el término $e^{j(\alpha_{mn} + \omega t - kR)}$ se ha omitido por claridad en todas las fórmulas anteriores, siendo α_{mn} la fase del modo mn con respecto al de referencia, P_{mn} es la potencia del modo mn en Watios; μ_{mn} es la raíz n-ésima de la función de Bessel $J_m(x)$; μ'_{mn} es la raíz n-ésima de la función de Bessel $J'_m(x)$; $k = \omega/c$ número de onda en el espacio libre; a el

radio de la guía de onda radiante; R la distancia a la cual se considera el campo lejano, definiendo:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \mu_{mn}^2 / a^2} \quad \text{y} \quad \beta'_{mn} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - \mu'^2_{mn} / a^2} \quad (\text{II.4})$$

$$q = m \left(\psi + \pi/2 - p_{mn} \right) \quad (\text{II.5})$$

donde ψ es el ángulo, en coordenadas esféricas, que define el plano sobre el que registra el patrón de radiación; p_{mn} es indicativo de la polarización del modo mn con respecto al de referencia; $\tau = \pm 1$ para modos rotatorios (izquierda o derecha) y $\tau = 0$ en cualquier otro caso; $C = 1/\sqrt{2}$ para $m=0$ y $C=1$ para cualquier otro caso.

Apéndice III

III.- Cálculo de eficiencias

Un parámetro bastante relevante de la pureza de las estructuras gaussianas que se generan con las antenas propuestas en el capítulo 3, son las medidas de eficiencia o pureza.

En principio, para poder evaluar el parecido entre dos distribuciones de campo en una zona del espacio, como es la apertura de la guía de ondas, deberemos recurrir a una correlación entre las dos distribuciones a comparar. En general, una correlación entre dos funciones complejas $F(x,y)$ y $G(x,y)$, definidas en la superficie S , la podemos calcular mediante la integral:

$$\int_S F(x,y)G^*(x,y)dS. \quad (\text{III.1})$$

En nuestro caso, debido a las peculiares características de las distribuciones de campo que se manejan, la integral de superficie se puede reducir a una integral de línea; ya que las dos distribuciones que se manejan, combinación de modos TE_{0n} y el gaussiano no tienen dependencia con el ángulo ϕ , por lo que quedaría:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R E_\phi(r,\phi)E_{\phi_g}^*(r,\phi)rdrd\phi = 2\pi \int_0^R E_\phi(r,\phi)E_{\phi_g}^*(r,\phi)rdr \quad (\text{III.2})$$

siendo $E_\phi(r,\phi)$ la composición de todas las componentes angulares de los modos TE_{0n} presentes, $E_{\phi_g}(r,\phi)$ la componente angular de la estructura gaussiana y R el radio de la guía.

La simplificación de la ecuación III.2 será válida, ya que se trabaja con modos TE_{0n} ³ y con componentes de variaciones simétricas de radio (que únicamente producen intercambio de potencia entre los mismos modos TE_{0n}).

Así como los modos TE_{0n} están ligados al radio de la guía de onda, R , los modos gaussianos están ligados al valor del ancho mínimo del haz, ϖ_0 , y la posición del mismo. En general, para cada valor del ϖ_0 , la interpretación de la integral III.2 será relativa al parecido existente entre la distribución de campos en la apertura y la

³ Como ya se vio en el capítulo 3 de este trabajo, estos modos se pueden definir completamente con la componente ϕ del campo eléctrico.

distribución gaussiana especificada. Normalmente, nos interesará conocer la estructura gaussiana que estamos generando, por lo que deberemos elegir ϖ_0 y la posición de este con tal de maximizar la correlación (III.2). De esta manera, además de obtener el valor de la eficiencia de conversión, podemos conocer las características de la estructura gaussiana generada.

La misma integral puede ser utilizada para buscar las mezclas de modos TE_{0n} necesarios para conformar una estructura gaussiana con un determinado valor de ϖ_0 situado a una cierta distancia. Para este caso, en vez de colocar la componente E_ϕ fruto de la composición de todos los modos TE_{0n} , deberemos ir colocando las componentes E_ϕ de los modos TE_{0n} por separado, dejando fija la expresión de $E_{\phi g}$.

Para obtener los diferentes coeficientes normalizados a la unidad, deberemos utilizar expresiones de E_ϕ y $E_{\phi g}$ normalizadas. La normalización la podemos realizar en potencia, por lo que el resultado de la integral III.2 lo deberemos elevar al cuadrado y lo dividiremos por las potencias de ambas, quedando finalmente:

$$\eta = \frac{\left(\int_0^R E_\phi(r, \phi) E_{\phi g}^*(r, \phi) r dr \right)^2}{\int_0^R \left(|E_\phi(r, \phi)| \right)^2 r dr \cdot \int_0^\infty \left(|E_{\phi g}(r, \phi)| \right)^2 r dr} . \quad (III.3)$$

Nótese que esta expresión es una integral en toda la apertura de la antena, y que se ha omitido el factor 2π que aparecía en la ecuación III.2, debido a la integral del ángulo, ya que se simplifica como consecuencia de la normalización.

Referencias

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A., 1964, “Handbook of Mathematical Functions: with formulas, Graphs, and Mathematical Tables”, New York: Dover Publications, Inc. SBN: 486-61272-4
- Buckley, M.J., Stein, D.A. and Vernon, R.J., 1991, “A single-period TE_{02} - TE_{01} mode converter in a highly overmoded circular waveguide”, *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 39, N° 8, pp. 1301-1306.
- Collin, R.E., 1992, “Foundations for Microwave Engineering”. Ed. McGraw-Hill. Electrical Engineering series. ISBN 0-07-112569-8.
- Couture, M. and Belanger, P.A., 1981, “From Gaussian beam to complex-source-point spherical wave”, *Phys. Rev. A.*, Vol. 24, N° 1, p. 355.
- Cullen, A.L. and Yu, P.K., 1979, “Electromagnetic theory of the open resonator”, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 366, Series A, N° 1725, pp. 155-171.
- Chu, T.S. and Itoh, T., 1986, “Generalized scattering matrix method for the analysis of cascaded and offset microstrip step discontinuities”. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, Vol. 34, N° 2, pp. 280-284.
- Del Río, C., Gonzalo, R., Marin, M., Sorolla, M., Möbius, A. and Thumm, M., 1995, “High Order Mode Beam Waveguide for Technological Medium Power Millimeter Wave Applications”. *Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Orlando (E.E.U.U.), pp. 519-520.
- Del Río, C., Gonzalo, R., Sorolla, M. and Thumm, M., 1995a, “Optimum horn antennas for high order mode beamwaveguides”. *Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Orlando (E.E.U.U.), pp. 295-296

- Del Río, C., Gonzalo, R. Sorolla, M. y Thumm, M., 1995b, “Antenas de bocina conversora de modos de guía de onda a estructuras gaussianas”, Patente de invención P-9501922.
- Del Río, C., Gonzalo, R. and Sorolla, M., 1996, “Paraxiality considerations of higher order gaussian modes”. *Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Berlín (Alemania), AT11. Conf. Proceedings ISBN 3-00-000800-4
- Del Río, C., Gonzalo, R. and Sorolla, M., 1996a, “High purity gaussian beam excitation by optimal horn antenna”. *Int. Symposium on Antennas and Propagation*, Chiba (Japón), Conf. Proceedings.
- Denisov, G.G., Kuftin, A.N., Malygin, V.I. Venediktov, N.P., Vinogradov, D.V. and Zapevalov, V.E., 1992, *Int. J. Electronics*. pp. 1079-1091.
- Doane, J.L., 1985, “Propagation and Mode Coupling in Corrugated and Smooth-Wall Circular Waveguides”. *Infrared and Millimeter Waves*. Vol. 13, *Millimeter Components and Techniques*, Part 4, Chapter 5. K.Button Editor. Academic Press. pp. 123-171.
- Edgcombe, C.J., 1993, “Gyrotron Oscillators: Their principles and practice” Ed. Taylor & Francis. ISBN 0-7484-0019-2
- Encinar, J.A., 1985, “Estudio de estructuras escalonadas en guía de onda radiando en semiespacio abierto mediante formulación híbrida modal-espectral”. Tesis Doctoral. U.P.M., E.T.S.I.T. Madrid.
- England, A.C. and Hsuan, H., 1985, “Electron Cyclotron Heating in Tokamaks and Tokamaks Reactors.” en *Wave Heating and Current Drive in Plasmas*, ed. V.L. Granatsein and P.L. Colestock, New York: Gordon and Breach Science Publishers, pp. 459-509.
- Flyagin, V.A., Gaponov, A.V., Petelin, M.I. and Yulpatov, V.K., 1977, “The Gyrotron” *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-25, p.514.
- Gaponov-Grekhov, A.V. and Granatsein, V.L., 1994, “Applications of High-Power Microwaves” Ed. Artech House. ISBN 0-89006-699-x

- García, J., 1991, "Análisis de dispositivos pasivos de microondas mediante el uso combinado del método de los elementos finitos y la matriz de dispersión generalizada.". Tesis doctoral. U.P.M., E.T.S.I.T. Madrid.
- Garin, P., Rebuffi, L., Thumm, M. and Jacobs, A., 1989, "Circular waveguide: reference formulas for propagation and radiation", *Int. Conf. Infrared and Millimeter Waves*.
- Goldsmith, P.F., 1982, "Quasi-optical techniques at millimeter and submillimeter wavelengths", in *Infrared and Millimeter Waves*, Vol. 6, K.J. Button, Ed., New York: Academic Press.
- Gonzalo, R., Del Río, C., Teniente, J. y Sorolla, M., 1996, "Optimum horn antenna design to excite high purity gaussian beam using overmoded waveguides". *Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Berlín (Alemania), BTh3. Conf. Proceedings ISBN 3-00-000800-4
- Goubau, G. and Schwering, F., 1961, "On the guided propagation of electromagnetic wave-beams", *IRE Trans. Antenna Propagation*, Vol. AP-9, pp. 248-259.
- Goubau, G., 1968, "Beam waveguides", *Advan. Microwaves*, Vol. 3, pp. 67-126.
- Graubner, T., Kasperek, K., Kumric, H., 1994, "Synthesis and applications of special power distributions by HE_{1n} mode mixtures", *Int. Conf. Infrared and Millimeter waves*.
- Hogelnik, H. and Li, T., 1966, "Laser beams and resonators", *Appl. Optics*, Vol. 5, N° 10, pp. 1312-1329.
- Kasperek, W. and Thumm, M., Comunicación privada, "Experimental studies on beam waveguides for use high-power gyrotrons". Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart. Alemania.
- Kasperek, W., Kumric, H., Müller, C.A., Schüller, P.G. and Erckmann, V., Comunicación privada*. "Beam waveguide transmission line for the 140 GHz. ECRH systems at the Stellarator W7-AS". Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart. Alemania.

- Kumric, H., Thumm, M. and Wilhelm, R., 1988, "Optimization of mode converters for generating the fundamental TE_{01} mode from TE_{06} gyrotron output at 140 GHz.", *Int. J. Electronics*, Vol. 64, N° 1, pp 77-94.
- Lamb, J.W., 1986, "Quasioptical coupling of gaussian beam systems to large cassegrain antennas", *Int. J. on Infrared and Millimeter Waves*, Vol. 7, N° 10, pp. 1511-1536
- Li, H, and Thumm, M., 1991, "Mode conversion due to curvature in corrugated waveguides", *Int. J. Electronics*, Col. 71, N° 2, pp. 333-347
- Liao, S.Y., 1988, "Microwave electron-tube devices", Ed. Prentice-Hall, ISBN 0-13-582073-1.
- Liberal, A., 1996, "Elaboración de herramienta CAD para el análisis de componentes a frecuencias de ondas milimétricas utilizando los métodos de análisis modal y 'scattering matrix'". P.F.C., U.P.N.A., E.T.S.I.I. y de Telecomunicación. Pamplona.
- Marcatili, E.A.J., 1962, "Waveguide elbow", *US Patent 3.090.931*, Cl. 333-98; Filed Mar. 8.
- Marcatili, E.A.J., 1964, "Mitre-bend with a plane mirror for the symmetrical electrical wave", *Proc. of the Symposium on Quasi-Optics* (New York: Politechnic Press).
- Marcuse, D., 1972, "Light Transmission Optics". New York: Van Nostrand Reinhold.
- Martin, D.H. and Lesurf, J.C.G., 1978, "Submillimeter-wave Optics" *Infrared Phys.* Vol. 18, N° 5/6, pp. 405-412.
- Martin, D.H. and Bowen J.W., 1993, "Long Wave Optics", *IEEE Trans. on Microwave theory and techniques*, Vol. 41, N° 10, pp. 1676-1690.
- Martín, R., Cepero, J.R., Sorolla, M. and López, A., 1989, "ECH System Design." *TJ-II Experiment. Application for Euratom preferential support (Phase II)*. Ass. Euratom Ciemat Fusion.

- Möbius, A. and Pretterebner, J., 1992, *Int Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, pp. 535-536
- Möbius, A., Del Río, C., Sorolla, M. and Thumm, M., 1996, "A hollow cone gaussian beam quasi-optical transmission line for a gyrotron technological system". *Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Berlín (Alemania), AT11. Conf. Proceedings ISBN 3-00-000800-4
- Murphy, J.A., 1987, "Distorsion of a simple Gaussian beam on reflection from off-axis ellipsoidal mirrors", *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*. Vol. 8, Nº 9, pp. 1165-1187.
- Murphy, J.A., 1988, "Aperture efficiencies of large axisymmetric reflector antennas fed by conical horns", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, Vol. AP-36, Nº 4, pp. 570-575.
- Ogawa, I., Idehara, T., Ibe, H., Hawahata, K. and Kasperek, W., 1994, "A transmission line for plasma scattering measurements with a submillimeter wave gyrotron", *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*, Vol. 15, Nº 10, pp. 1587-1602.
- Rebollar, J.M., 1984, "Estudio de discontinuidades transversales en guía de onda mediante análisis modal". Informe interno. Departamento de publicaciones de U.P.M., Madrid.
- Rebuffi, L. and Thumm, M., 1989, "Sidelobe suppression in radiated mode mixtures", *Int. Conf. Infrared and Millimeter Waves*, Conf. Digest, pp. 154-155.
- Rebuffi, L., Thumm, M. and Henle, W., 1989a, "A beam rectifier antenna system", *Int. Conf. Infrared and Millimeter Waves*, Conf. Digest, pp. 394-395.
- Saleh, B.E.A., and Teich, M.C., 1991, "Fundamentals of photonics". John Wiley & Sons.
- Shapiro, M.A. and Vlasov, S.N., 1992, "Study of combined transmission line for high power wave generated by a gyrotron in the millimeter wavelength range", *Int. J. Electronics*, Vol. 72, Nºs 5 y 6, pp. 1127-1133.

- Shih, Y.C., 1989, "The mode-matching method", en "Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures", Editado por T. Itoh, Wiley Interscience, John Wiley & Sons.
- Silver, S., 1984, "Microwave antenna theory and design", Peter Peregrinus Editor.
- Sorolla, M., 1991, "Contribución al estudio y diseño de componentes en guía de onda sobredimensionada para aplicaciones de muy alta potencia a frecuencias milimétricas". Tesis doctoral, E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación, U.P.M.
- Sorolla, M., Del Río, C. Martín, R., Cepero, J.R., Likin, K., Sánchez, A. and Sarkisyan, K., 1995, "Beam waveguide for ECRH at TJ-II experiment", *Int. Conf. Infrared and Millimeter Waves*, Orlando (E.E.U.U.), Proceedings pp. 477-478.
- Sporleder, F. and Unger, H.G., 1979, "Waveguides tapers, transitions and couplers". Peter Peregrinus Editor.
- Sporleder, F., 1976, "A compact 90° corner with expanded diameter and elliptic mirror for circular waveguide". *Int. Conf. Millimetre waveguide system*.
- Stavroutidis, O.N., 1972, "The optics of rays, wavefronts, and caustics", Academic Press. New York and London. Library of Congress Catalog Card Number 72-84280.
- Tang, C.C.H., 1961, "Optimization of Waveguide Tapers capable of Multimode Propagation". *IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, pp. 442-452.
- Thumm, M. and Kumric, H., 1987, "TE₀₃ to TE₀₁ mode converters for use with a 150 GHz. gyrotron", *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*, Vol. 8, N° 3, pp. 227-240.
- Thumm, M., 1984, "High power millimeter-wave mode converters in overmoded circular waveguides using periodic wall perturbations" *Int J. Electronics*. Vol. 57, N° 6, pp. 1225-1246.
- Thumm, M., 1996, "State-of-the-Art of High Power Gyro-Devices and Free Electron Masers Update 1995". *Institut für Technische Physik*. Comunicación privada.

- Thumm, M., Erckmann, V., Janzen, G., Kaspaprek, W., Müller, G., Schüller, P.G. and Wilhelm, R., 1985, "Generation of the gaussian-like HE_{11} mode from gyrotron TE_{0n} mode mixtures at 70 GHz.", *Int. J. Infrared and Millimeter Waves*, Vol. 6, N° 6, pp. 459-470.
- Thumm, M., Jacobs, A. and Sorolla, M., 1991, "Design of Short High-Power TE_{11} - HE_{11} mode converters in Highly overmoded corrugated waveguides." *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*. Vol. 39, pp. 301-309.
- Unger, H.G., 1958, "Circular Waveguide Taper of Improved Design". *The Bell S.T.J.*, pp. 899-912.
- Vlasov, S.N. and Shapiro M.A., Comunicación privada. "Transformación de ondas en líneas de transmisión con guías de onda cuasi-ópticas" (En Ruso).
- Vlasov, S.N. and Orlova, I.M., 1974, "Quasioptical transformer which transforms the waves in a waveguide having a circular cross-section into a highly directional wave beam". *Radiophys. Quantum Electron.*, Vol. 17, N° 1, pp. 115-119.
- Vlasov, S.N., Zagryadskaya, L.I. and Petelin, M.I., 1975, "Transformations of Whispering Gallery Mode Propagating in a Circular Waveguide In to a Beam of Waves". *Radio Eng. Electron. Phys.* Vol. 20, N° 10, pp. 14-18.
- Wencker, G., 1969, "Rekursionsformeln und Entwicklungen der Strukturfunktionen Gaußcher Strahlen", *A.U.E.*, Band 23, pp. 521-523.